

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Донбаська державна машинобудівна академія (ДДМА)

ОПР МАТЕРІАЛІВ

Збірник розрахунково-графічних завдань

**для студентів всіх механічних спеціальностей
денної форми навчання**

Затверджено
на засіданні
методичної ради
Протокол № від

Краматорськ
ДДМА
2015

Опір матеріалів: збірник розрахунково-графічних завдань для студентів всіх механічних спеціальностей денної форми навчання/ уклад.: Ю.С. Холодняк, В.Л.Бусов, С.В.Капорович – Краматорськ : ДДМА, 2015. – 233 с.

Містяться умови задач, які входять до завдань, даються короткі теоретичні викладки за тематикою задач, які виконуються, рекомендації з їх розв'язання, приклади їх виконання та аналіз одержаних результатів.

Укладачі: Ю.С. Холодняк, доц.;
В.Л. Бусов, доц.;
С.В. Капорович, ст.викл.

Відп. за випуск С.В. Подлесний, доц.

СОДЕРЖАНИЕ

ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ.....	5
1 РОЗРАХУНОК СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМ, ЯКІ ПРАЦЮЮТЬ НА РОЗТЯГАННЯ ТА СТИСКАННЯ	6
1.1 Статично визначувана стрижнева система	6
1.2 Ступінчастий статично невизначуваний стрижень	15
1.3 Статично невизначувана стрижнева система	24
2 ПОБУДОВА ЕПЮР ВНУТРІШНІХ ЗУСИЛЬ ДЛЯ БАЛОК ТА РАМ	35
2.1 Консольна балка (задача 2.1) та двохопорна балка (задача 2.2).....	35
2.2 Консольна рама (задача 2.3) та двохопорна рама (задача 2.4).....	57
3 РОЗРАХУНОК ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ	79
3.1 Симетричний складний переріз.....	79
3.2 Несиметричний складний переріз	87
4 ПЛОСКЕ ЗГІНАННЯ І СКЛАДНИЙ ОПІР.....	97
4.1 Повна перевірка міцності балки	97
4.2 Складне згинання	106
4.3 Позацентрове розтягання і стискання	119
4.4 Згинання з крученням	128

5 РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ	137
5.1 Один раз статично невизначувана балка	137
5.2 Один раз статично невизначувана рама.....	151
5.3 Двічі статично невизначувана рама	160
5.4 Двічі статично невизначувана балка.....	180
5.5 Тричі статично невизначувана балка	188
6 СТІЙКІСТЬ І УДАРНЕ НАВАНТАЖЕННЯ СТРИЖНЕВИХ КОНСТРУКЦІЙ.....	199
6.1 Підбір перерізу стиснутої стійки	199
6.2 Визначення напружень в рамі при ударі.	216
Додаток А Основні параметри катаних профілів	225
Додаток Б Основні параметри стиснутих стрижнів	231
Додаток В. Формула крайніх ординат і особливості її застосування	232

ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ

Курсові розрахунково-графічні завдання призначені для розвитку у студента навичок виконання типових розрахунків на міцність, які часто зустрічаються в інженерній практиці. Крім того, вони допомагають кращому засвоєнню теоретичного курсу і придбанню навичок самостійної практичної роботи.

Завдання видається після вивчення відповідного матеріалу.

Кожний студент одержує варіант, згідно з яким виконує усі завдання. Номер варіанта складається з чотирьох цифр. Перша та друга цифри вказують номери стовпчиків відповідно в першій та другій таблицях, третя і четверта – номер схеми.

Дані вказівки подають загальні вимоги і правила оформлення розрахунково-графічних завдань з курсу “Опір матеріалів” згідно з ДСТом.

Виконання завдання повинно мати такий вигляд:

1 Для кожної задачі на першій сторінці повинно бути записано завдання з даними, відповідно до варіанту, рисунок з усіма необхідними для розрахунку розмірами і значеннями навантажень, розраховані значення реакцій, отримані епюри.

2 На наступних сторінках необхідно привести в довільній формі текстову частину, розрахунки і додаткові рисунки, які пояснюють розв’язання задачі. Завдання повинно бути написано на одній сторінці аркушу паперу формату А4.

3 Усі рисунки та епюри слід виконувати в масштабі.

4 Усі фізичні розміри необхідно виконувати в міжнародній системі одиниць (СІ).

5 Титульний аркуш повинен бути виконаний на цупкому папері формату А4 (зразок див. у додатку А).

6 При виконанні задач необхідно дотримуватись методичних вказівок до кожної задачі.

7 Усі числа, за допомогою яких ведуться розрахунки, повинні бути обґрунтованими.

1 РОЗРАХУНОК СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМ, ЯКІ ПРАЦЮЮТЬ НА РОЗТЯГАННЯ ТА СТИСКАННЯ

1.1 Статично визначувана стрижнева система

Із розрахунку на міцність підібрати розміри поперечних перерізів стрижнів, якщо

стрижень 1 – круглого поперечного перерізу;

стрижень 2 складається з двох рівнобічних кутиків;

стрижень 3 – двотаврового поперечного перерізу.

Знайти абсолютне подовження (укорочення) стрижнів, якщо $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Вихідні дані вибрати із таблиць 1.1 та 1.2 і рисунку 1.1.

Таблиця 1.1 – Вихідні дані до задачі 1.1

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a , м	0,8	0,6	1,0	1,2	1,4	1,5	2,0	2,5	1,8	1,6
b , м	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	1,3	0,8	2,2	2,4
c , м	1,2	1,4	0,8	0,6	2,0	2,2	1,1	1,8	1,7	1,6

Таблиця 1.2 – Вихідні дані до задачі 1.1

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M , кН·м	100	120	200	80	300	100	220	160	140	250
P , кН	400	300	450	200	350	240	250	280	340	320
q , кН/м	200	150	250	300	350	400	280	350	380	320

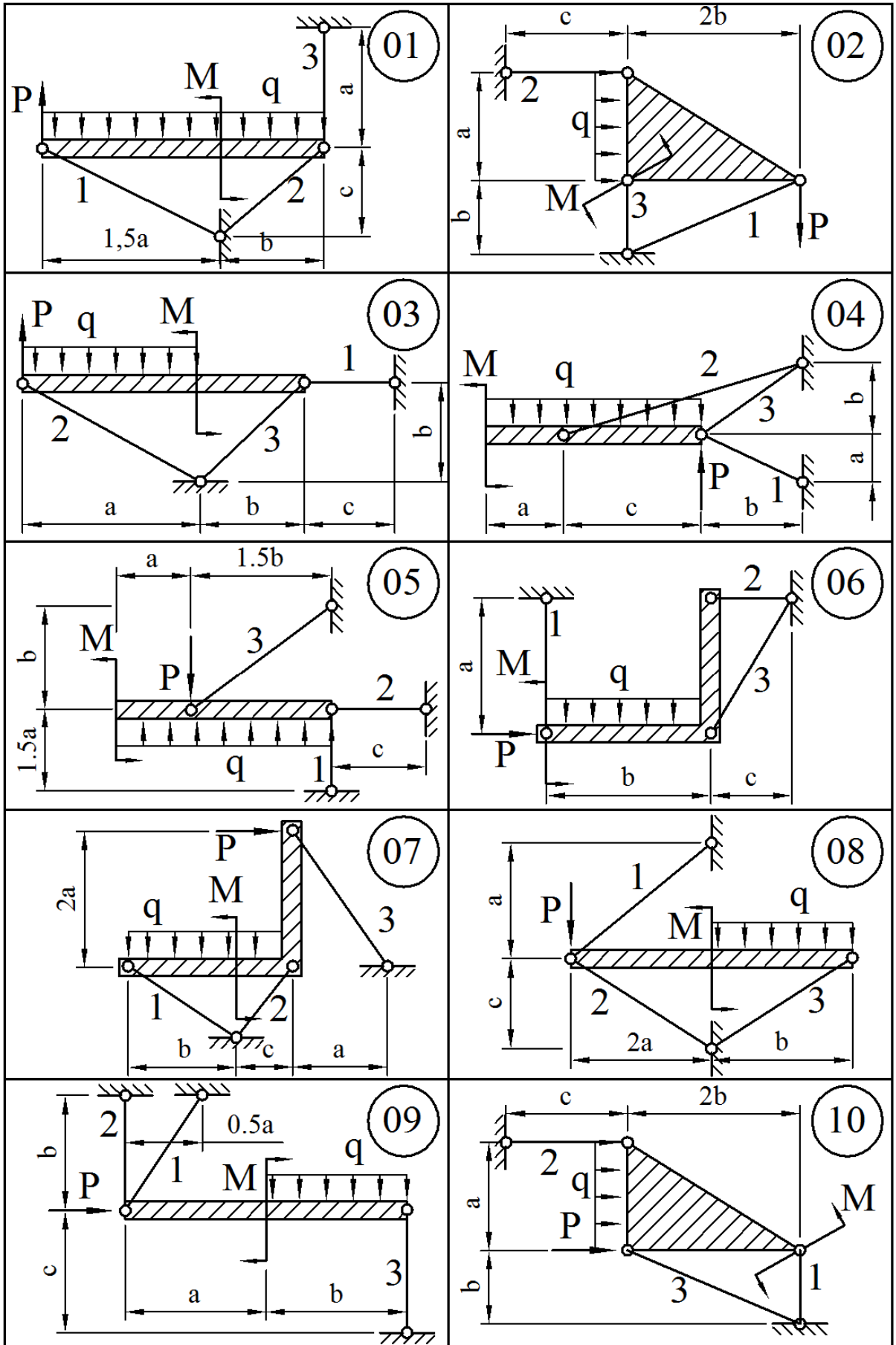


Рисунок 1.1

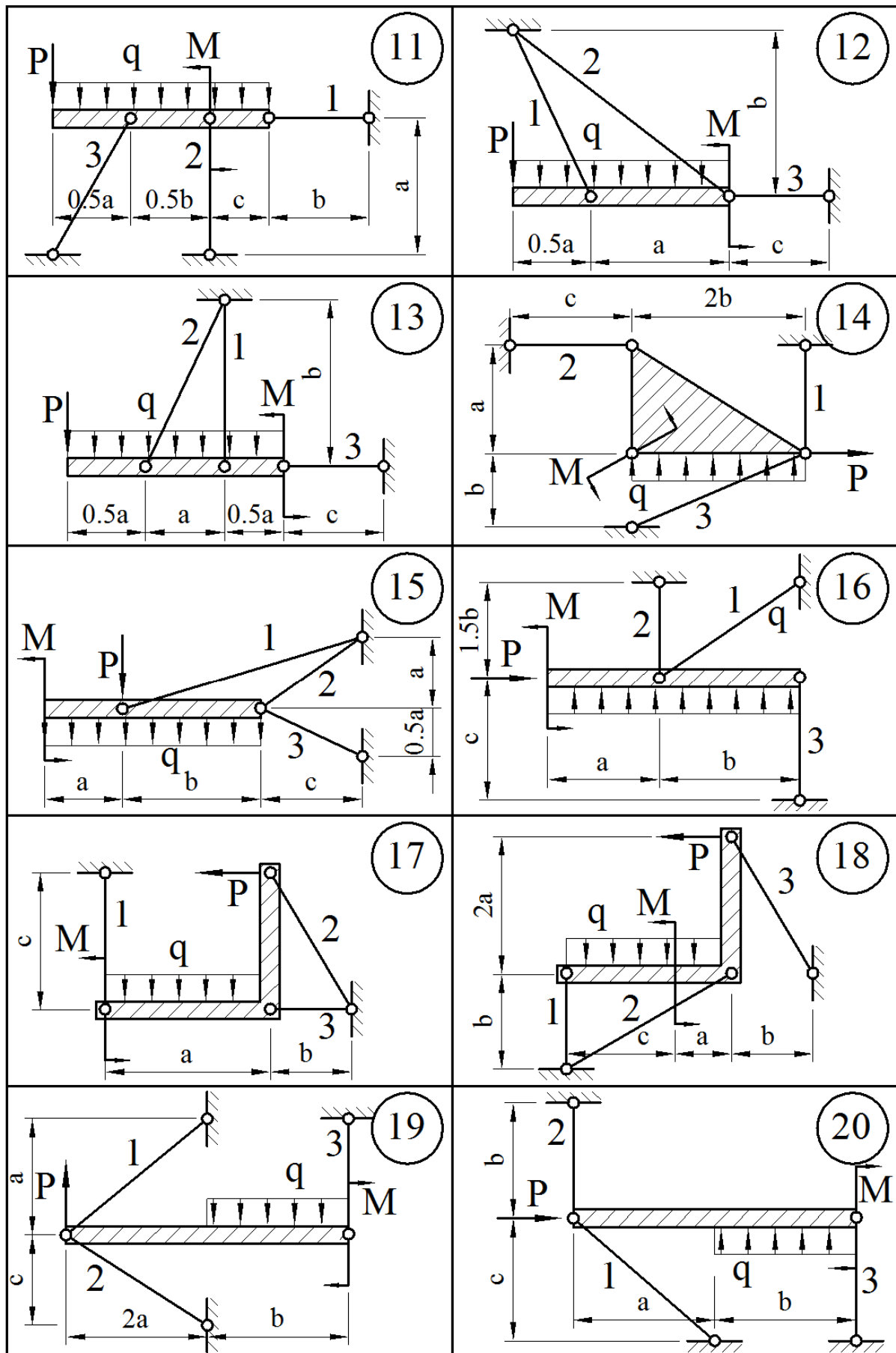


Рисунок 1.1, аркуш 2

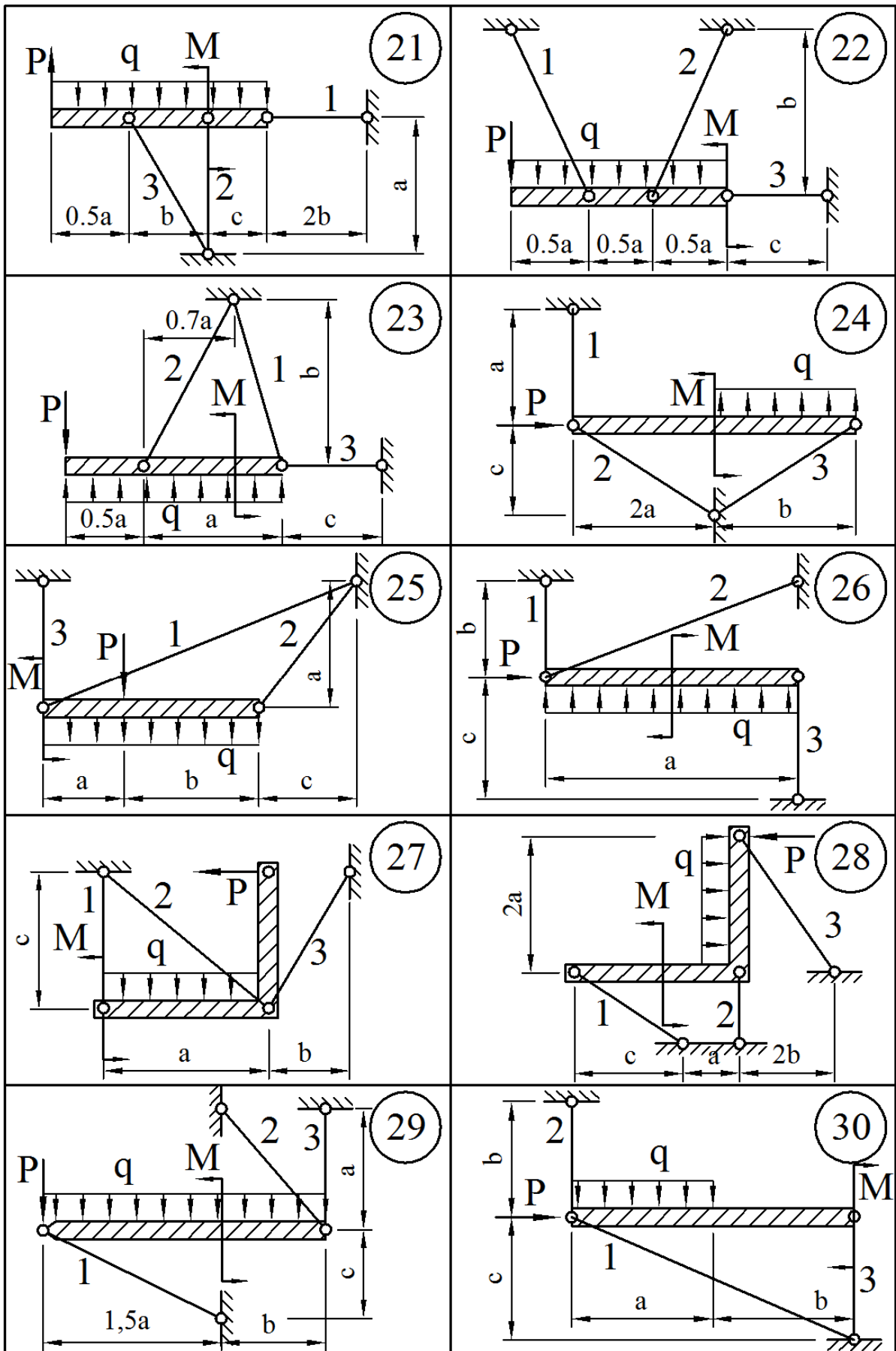


Рисунок 1.1, аркуш 3

1.1.1 Методичні вказівки до виконання задачі 1.1

Необхідні розміри поперечних перерізів стрижнів можна знайти з умови міцності. Для даних стрижневих систем, які працюють на розтягання і стискання, умова міцності має вигляд:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma], \quad (1.1)$$

де N – подовжня (осьова) сила в стрижні;

F – площа поперечного перерізу стрижня;

$[\sigma]$ – допустиме напруження.

Для виконання проектувальних розрахунків необхідно визначити площу поперечних перерізів стрижнів:

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]}. \quad (1.2)$$

У цій нерівності невідоме зусилля N .

Системи, які розглядаються, статично визначувані і зусилля в них можуть бути знайдені тільки з рівнянь рівноваги статки. Задачу слід розв'язувати за таким планом:

1 Скласти рівняння рівноваги, використовуючи тільки ті з них, до яких не входять реакції опор, котрі знаходити немає потреби, і розрахувати зусилля в стрижнях 1, 2, 3.

2 Знайти площі поперечних перерізів стрижнів за формулою (1.2):

а) поперечний переріз стрижня 1 – круг. Для круглого поперечного перерізу

$$F_1 = \frac{\pi d^2}{4}, \text{ звідки } d \geq \sqrt{\frac{4F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4N}{\pi[\sigma]}}, \quad (1.3)$$

після чого прийняти діаметр з рекомендованих розмірів згідно з Державним стандартом;

б) поперечний переріз стрижня 2 – два рівнобічних кутика.

За площею кутика

$$F_{\text{кут}} = \frac{F_2}{2} = \frac{N_2}{2[\sigma]}.$$

Із таблиці знаходимо номер кутика, площа якого повинна бути не меншою за $F_{\text{кут}}$;

в) поперечний переріз стрижня 3 – двотавр. За площею $F_3 = \frac{N_3}{[\sigma]}$.

Із таблиці сортаменту знаходимо відповідний номер двотавра.

Якщо знайдені площі рівнобічного кутика і двотавра менші від площі найменшого профілю, то необхідно прийняти найменший профіль.

3 Визначити подовження (укорочення) стрижнів за законом Гука. Якщо стрижень розтягується, то $\Delta\ell$ вважається додатним, а якщо стискається – від’ємним:

$$\Delta\ell_i = \frac{N_i \ell_i}{EF_i}, \quad (1.4)$$

де N_i – зусилля в i -му стрижні;

ℓ_i – довжина i -го стрижня;

E – модуль пружності матеріалу;

F_i – площа поперечного перерізу підбраного профілю.

1.1.2 Приклад розв’язання задачі 1.1

Для стрижневої системи, показаної на рисунку 1.2, із розрахунку на міцність підібрати розміри поперечних перерізів стрижнів, якщо стрижень 1 – круглого поперечного перерізу, стрижень 2 складається з двох рівнобічних кутиків, стрижень 3 – двотаврового поперечного перерізу. Знайти абсолютне подовження (укорочення) стрижнів, якщо $[\sigma]=160$ МПа, $E=2 \cdot 10^5$ МПа.

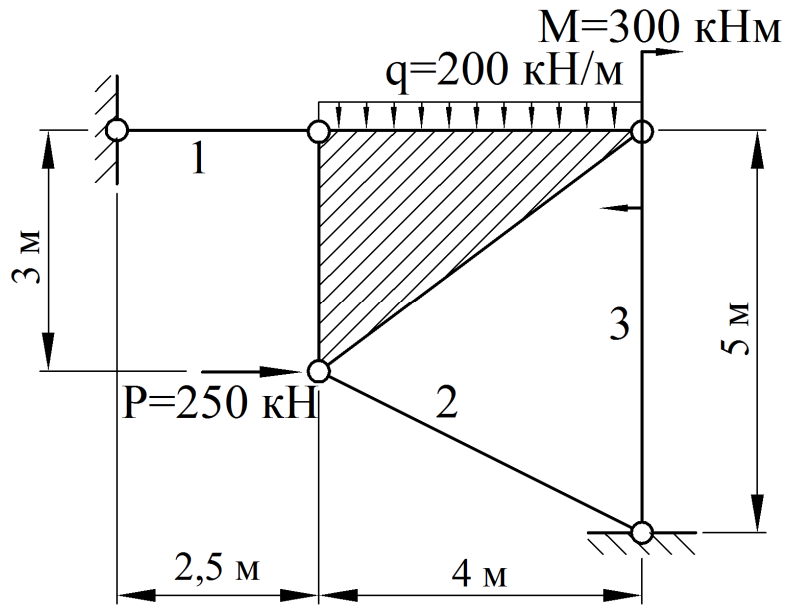


Рисунок 1.2 – Стрижнева система

Розв'язання. Відкидаємо зв'язки, їх вплив заміняємо зусиллями N_1 , N_2 та N_3 (рис. 1.3). У заданій стрижневій системі (рис. 1.2) невідомими є зусилля в трьох стрижнях, які не перетинаються в одній точці й не паралельні між собою.

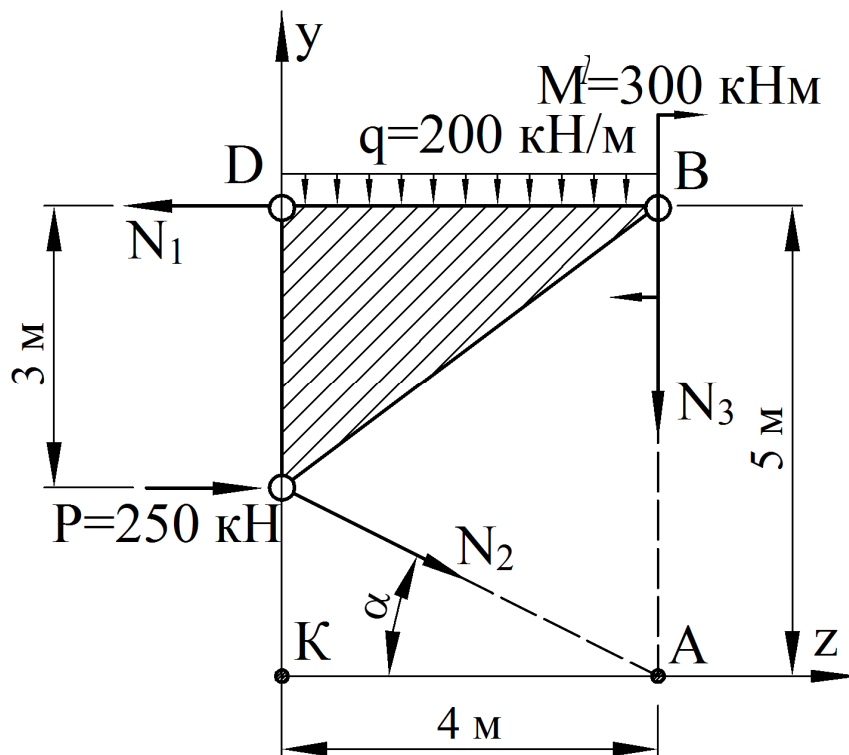


Рисунок 1.3 – Стрижнева система з відкинутими зв'язками

Для такої системи можна скласти три незалежних рівняння статички, тобто вона є статично визначуваною стрижневою системою. Для визначення зусиль у стрижнях складаємо рівняння рівноваги. Необхідно намагатися складати тільки такі рівняння, до яких входило б тільки по одному невідомому зусиллю.

Беремо суму моментів відносно точки A (див. рис. 1.3), тому що в ній перетинаються два невідомі зусилля – N_2 і N_3 :

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0; \\ N_1 \cdot 5 - P \cdot (5 - 3) + q \cdot 4 \cdot 2 - M &= 0, \\ N_1 &= \frac{P \cdot 2 - q \cdot 4 \cdot 2 + M}{5} = \frac{250 \cdot 2 - 200 \cdot 4 \cdot 2 + 300}{5} = -160 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Тепер беремо суму моментів відносно точки B (у ній перетинаються зусилля N_1 та N_3):

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0 \\ P \cdot 3 + q \cdot 4 \cdot 2 - M + N_2 \cdot 5 \cdot \cos \alpha &= 0, \\ N_2 &= \frac{-P \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 2 + M}{5 \cdot \cos \alpha} = \frac{-250 \cdot 3 - 200 \cdot 4 \cdot 2 + 300}{5 \cdot 0,894} = -458,6 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Косинус та синус кута α знаходимо з трикутника AKC (рис. 1.3).

$$\begin{aligned}l_3 = AC &= \sqrt{AK^2 + KC^2} = \sqrt{4^2 + (5-3)^2} = 4,47 \text{ м}; \\ \cos \alpha &= \frac{AK}{AC} = \frac{4}{4,47} = 0,894; \quad \sin \alpha = \frac{KC}{AC} = \frac{2}{4,47} = 0,447.\end{aligned}$$

Зусилля N_3 знаходимо із суми проєкцій на вертикальну вісь

$$\begin{aligned}\sum P_Y &= 0; \\ -q \cdot 4 - N_2 \cdot \sin \alpha - N_3 &= 0; \\ N_3 &= -q \cdot 4 - N_2 \cdot \sin \alpha = -200 \cdot 4 - (-458,6) \cdot 0,447 = -595 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Усі зусилля одержали зі знаком мінус. Значить, напрямок усіх зусиль зворотний заданому, тобто усі стрижні стиснуті.

Тепер виконаємо перевірку, чи вірно ми знайшли зусилля. Для перевірки необхідно брати тільки ті рівняння, які ми не використовували при знаходженні зусиль.

$$\begin{aligned}\sum P_z &= 0; \\ P - N_1 + N_2 \cdot \cos \alpha &= 0; \\ 250 - (-160) - 458,6 \cdot 0,894 &= 0; \\ 410 - 410 &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_c &= 0; \\ N_1 \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 2 - M - N_3 \cdot 4 &= 0; \\ -160 \cdot 3 - 200 \cdot 4 \cdot 2 - 300 - (-595) \cdot 4 &= 0; \\ 2380 - 2380 &= 0.\end{aligned}$$

Тепер за допомогою формули (1.2) підбираємо розміри поперечних перерізів стрижнів.

Стрижень 1 за умовою задачі – круглого поперечного перерізу:

$$F_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{160 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 10 \text{ см}^2.$$

Його діаметр:

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10}{3,14}} = 3,57 \text{ см}.$$

З рекомендованого ряду чисел (за ГОСТом 6636-69) приймаємо діаметр стрижня $d = 36 \text{ мм}$.

Стрижень 2 за умовою задачі складається з двох рівнобічних кутиків:

$$F_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{458,6 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 28,66 \text{ см}^2.$$

Звідси площа одного кутика:

$$F_{\text{кут}} = \frac{F_2}{2} = \frac{28,66}{2} = 14,33 \text{ см}^2.$$

З таблиці сортаменту приймаємо кутик 90x90x9 (ДСТУ 2251-93), площа якого $F_{\text{кут}} = 15,6 \text{ см}^2$.

Стрижень 3 за умовою задачі – двотаврового поперечного перерізу:

$$F_3 \geq \frac{N_3}{[\sigma]} = \frac{595 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 37,2 \text{ см}^2.$$

З таблиці сортаменту приймаємо двотавр 24а (ГОСТ 8239-89), площа якого $F_3 = 37,5 \text{ см}^2$.

Підібравши площі поперечних перерізів, знаходимо абсолютні подовження стрижнів за формулою (1.4):

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{-160 \cdot 10^{-3} \cdot 2,5}{2 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 3,6^2}{4} \cdot 10^{-4}} = -19,7 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -1,97 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2} = \frac{-458,6 \cdot 10^{-3} \cdot 4,47}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 15,6 \cdot 10^{-4}} = -32,9 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -3,29 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EF_3} = \frac{-595 \cdot 10^{-3} \cdot 5}{2 \cdot 10^5 \cdot 37,5 \cdot 10^{-4}} = -39,7 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -3,97 \text{ мм}.$$

Остаточно можемо зробити висновок, що всі три стрижні зменшують свою довжину.

1.2 Ступінчастий статично невизначуваний стрижень

Для сталевого стрижня побудувати епюри поздовжніх зусиль N і нормальних напружень σ , якщо між стрижнем та стіною до зміни температури і прикладення зусиль був зазор δ . Вихідні дані вибрати із таблиць 1.3, 1.4 і рисунку 1.4.

Таблиця 1.3 – Вихідні дані до задачі 1.2

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a, \text{ м}$	0,8	0,6	1,0	1,2	1,4	1,5	2,0	2,5	1,8	1,6
$b, \text{ м}$	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	1,3	0,8	2,2	2,4
$c, \text{ м}$	1,2	1,4	0,8	0,6	2,0	2,2	1,1	1,8	1,7	1,6
$t, ^\circ\text{C}$	30	35	50	45	25	55	60	20	40	65

Таблиця 1.4 – Вихідні дані до задачі 1.2

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$F, \text{ см}^2$	10	8	11	13	16	18	20	15	14	17
$P, \text{ кН}$	100	150	180	230	200	140	130	170	280	250
$\delta, \text{ мм}$	0,01	0,02	0,04	0,03	0,07	0,08	0,04	0,03	0,04	0,05

1.2.1 Методичні вказівки до виконання задачі 1.2

Якщо при нагріванні стрижня і дії на нього зусиль P зазор закрийється, то в обох жорстких опорах з'являться реакції, які будуть діяти вздовж осі. При осьовій дії усіх зусиль можна записати лише одне рівняння рівноваги – суму проєкцій усіх зусиль на вісь стрижня, у якому будуть обидві реакції. Очевидно, що знайти дві реакції з одного рівняння неможливо.

Система, в якій кількість невідомих зусиль перевищує кількість рівнянь статички, називається статично невизначуваною. Нагадаємо, що для плоскої довільної системи сил можна скласти три рівняння рівноваги, для плоско-паралельної і плоско-збіжної – два.

Статистично невизначувані системи розв'язуються за таким планом:

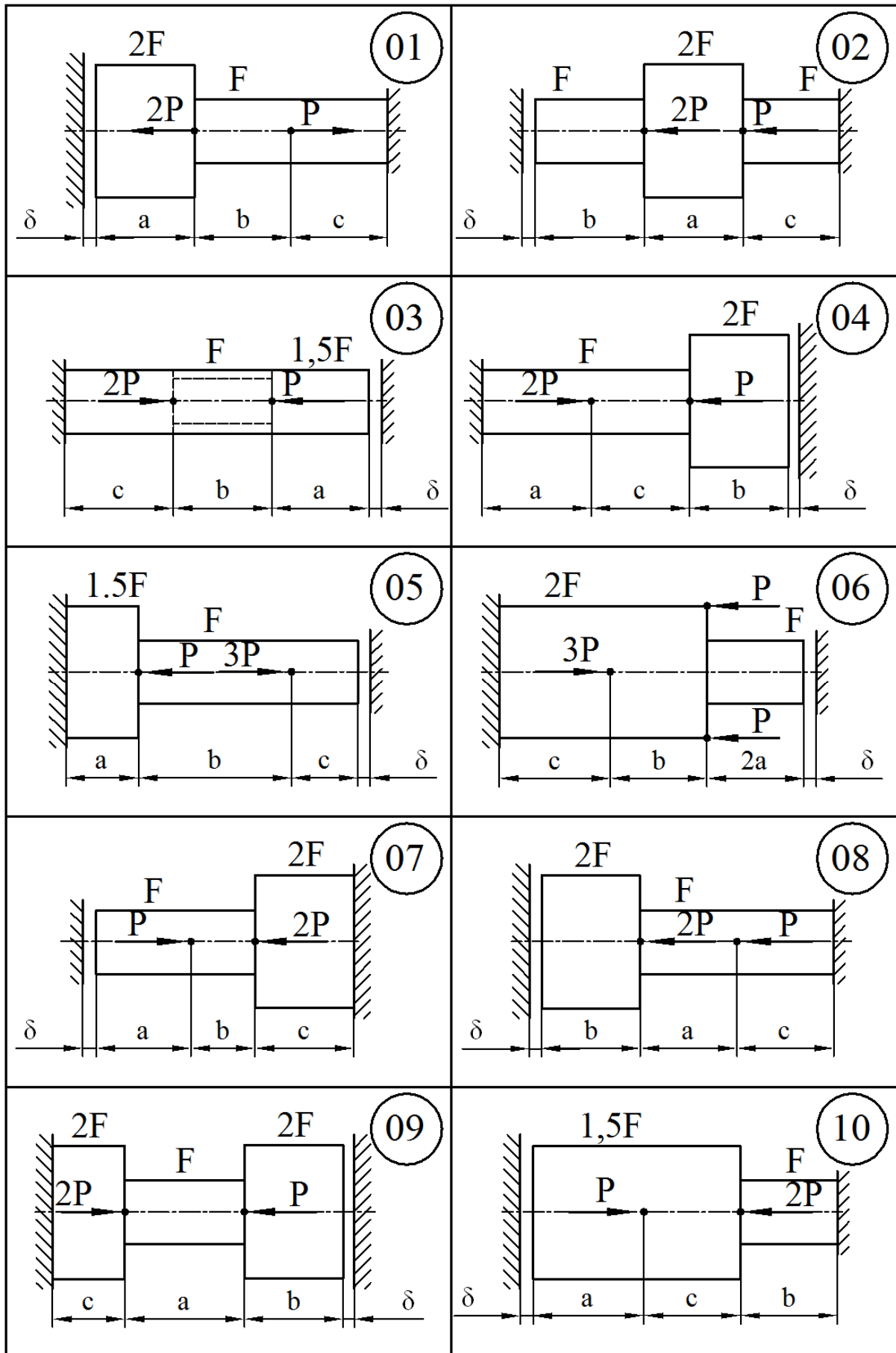


Рисунок 1.4

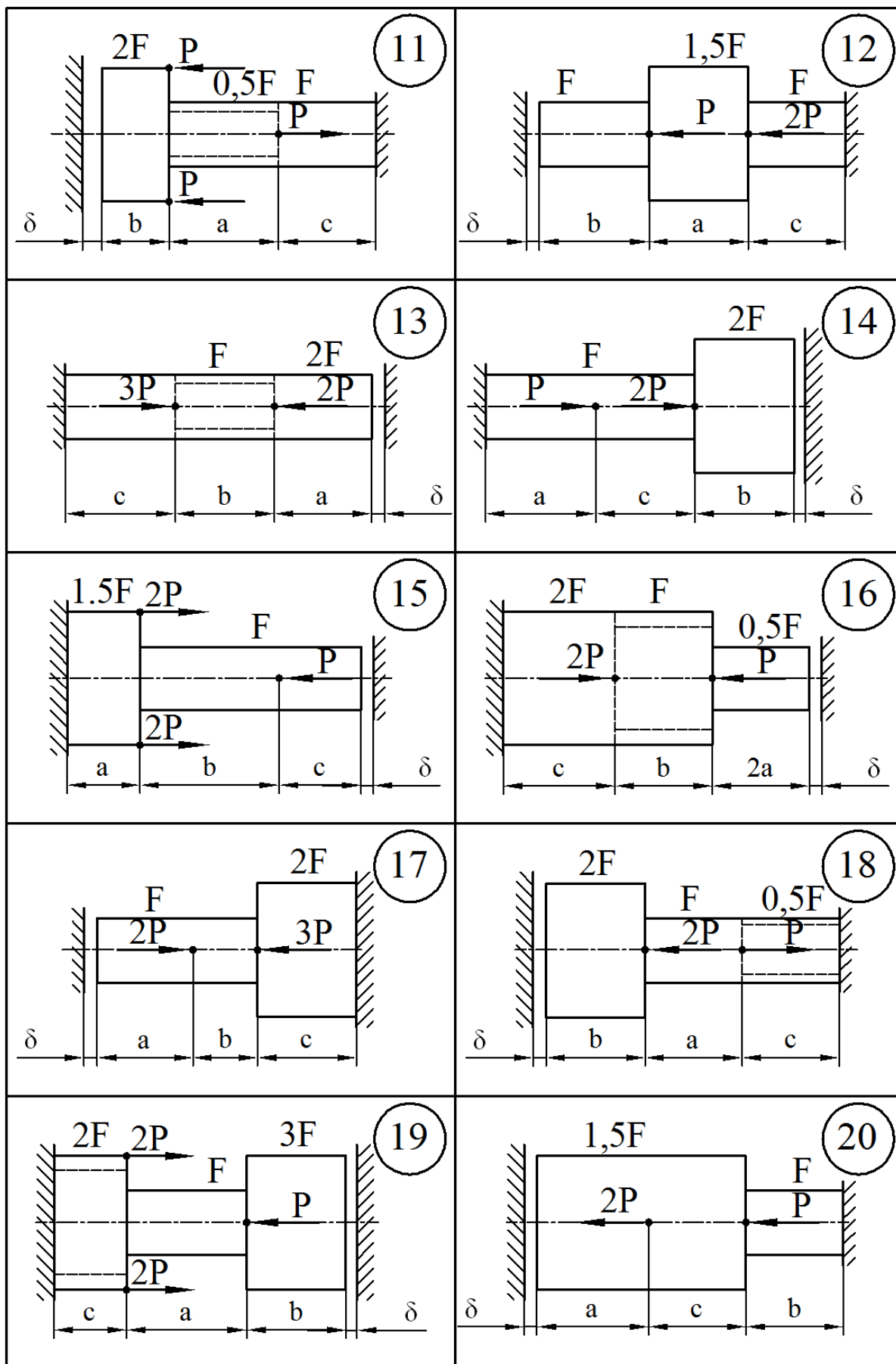


Рисунок 1.4, аркуш 2

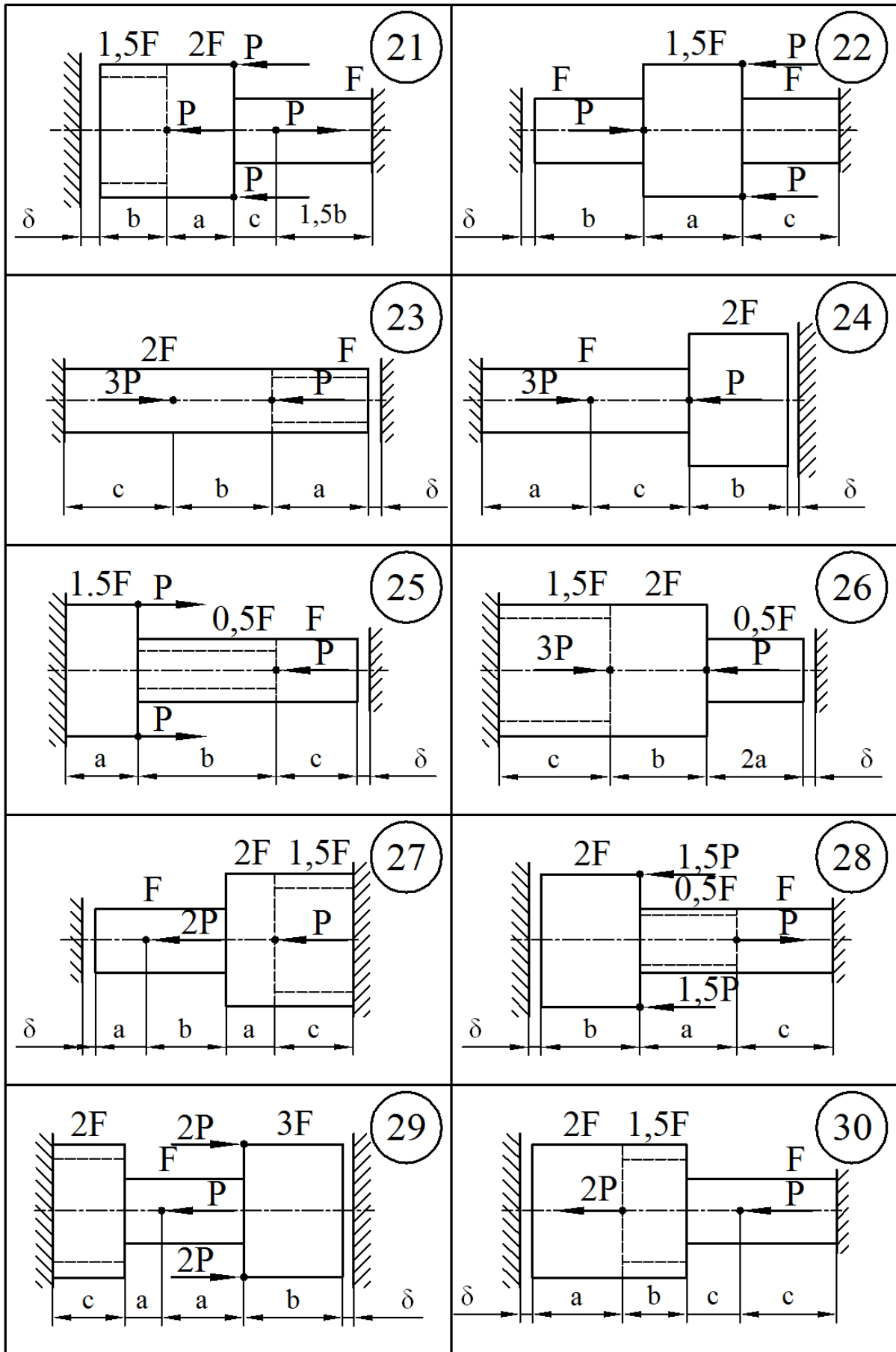


Рисунок 1.4, аркуш 3

1 Визначається ступінь статичної невизначуваності конструкції, тобто кількість зайвих невідомих, яка дорівнює різниці між кількістю невідомих і кількістю рівнянь статички. У цій задачі $S = 2 - 1 = 1$.

2 Для розв'язання статично невизначуваної системи необхідно розглянути три аспекти задачі:

Статичний аспект задачі. Складаємо рівняння рівноваги відокремлених елементів конструкції, що мають невідомі зусилля:

$$\sum P_z = 0. \quad (1.5)$$

Геометричний аспект задачі. Розглядаємо систему в деформованому стані, що дає змогу встановити зв'язки між деформаціями або переміщеннями окремих елементів конструкції. Здобуті рівняння називають рівняннями сумісності (нерозривності) деформацій. У цій задачі до прикладення зусиль і зміни температури між одним кінцем і опорою був зазор δ . Після нагрівання і дії заданих зусиль він закривається. Таким чином, стрижень зможе змінити свою довжину на δ і рівняння сумісності буде мати вигляд:

$$\Delta l = \Delta l_N + \Delta l_t = \Delta, \quad (1.6)$$

де Δl_N – деформація від зусиль;

Δl_t – деформація від температури.

Фізичний аспект задачі. Оскільки зусилля N змінюються за довжиною стрижня, то для наочності рекомендується зобразити епюру N у загальному вигляді (через задані зусилля і реакції опор), використовуючи для цього метод перерізів.

Поздовжня сила дорівнює сумі проекцій на вісь стрижня всіх зовнішніх сил, які діють з одного боку від перерізу. Якщо сила діє від перерізу, вважати зусилля в ньому додатним. Підставити зусилля на кожній ділянці стрижня з епюри N з урахуванням знака, довжини відповідних ділянок, площі їх поперечних перерізів. Знайти деформації стрижнів Δl_N від зусиль за формулою (1.4). Зусилля N_i підставити з урахуванням знака.

Оскільки матеріал усіх ділянок однаковий, то деформацію стрижня від нагрівання можна знайти із залежності:

$$\Delta l_t = \alpha l \Delta t,$$

де ℓ – довжина всього стрижня;
 α – температурний коефіцієнт осьового подовження, для сталі
 $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}$;

Δt – температура нагрівання.

Таким чином, умова сумісності деформацій (1.6) матиме вигляд:

$$\Delta \ell = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \ell_i}{EF_i} + \alpha \ell \Delta t = \delta. \quad (1.7)$$

Синтез. Розв'язуючи сумісно статичні, геометричні та фізичні рівняння, знаходимо невідомі зусилля.

3 Одержаний розв'язок необхідно аналізувати. Реакція з боку зазору не може бути спрямована від стрижня (заздалегідь напрямок реакцій довільний), оскільки сили P задані таким чином, що їх рівнодіюча R спрямована на опору з зазором (рис. 1.5)

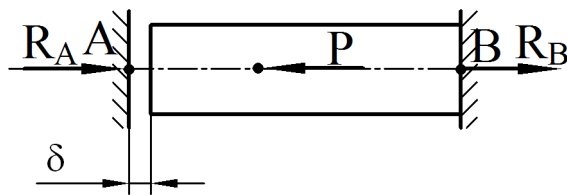


Рисунок 1.5 – Статично невизначуваний стрижень

Отже, реакція від сили в опорі A спрямована на стрижень (див. рис. 1.5, опора A), а в опорі B – від нього (див. рис. 1.5).

Після того, як знайшли реакції опор, необхідно побудувати епюру подовжніх сил N .

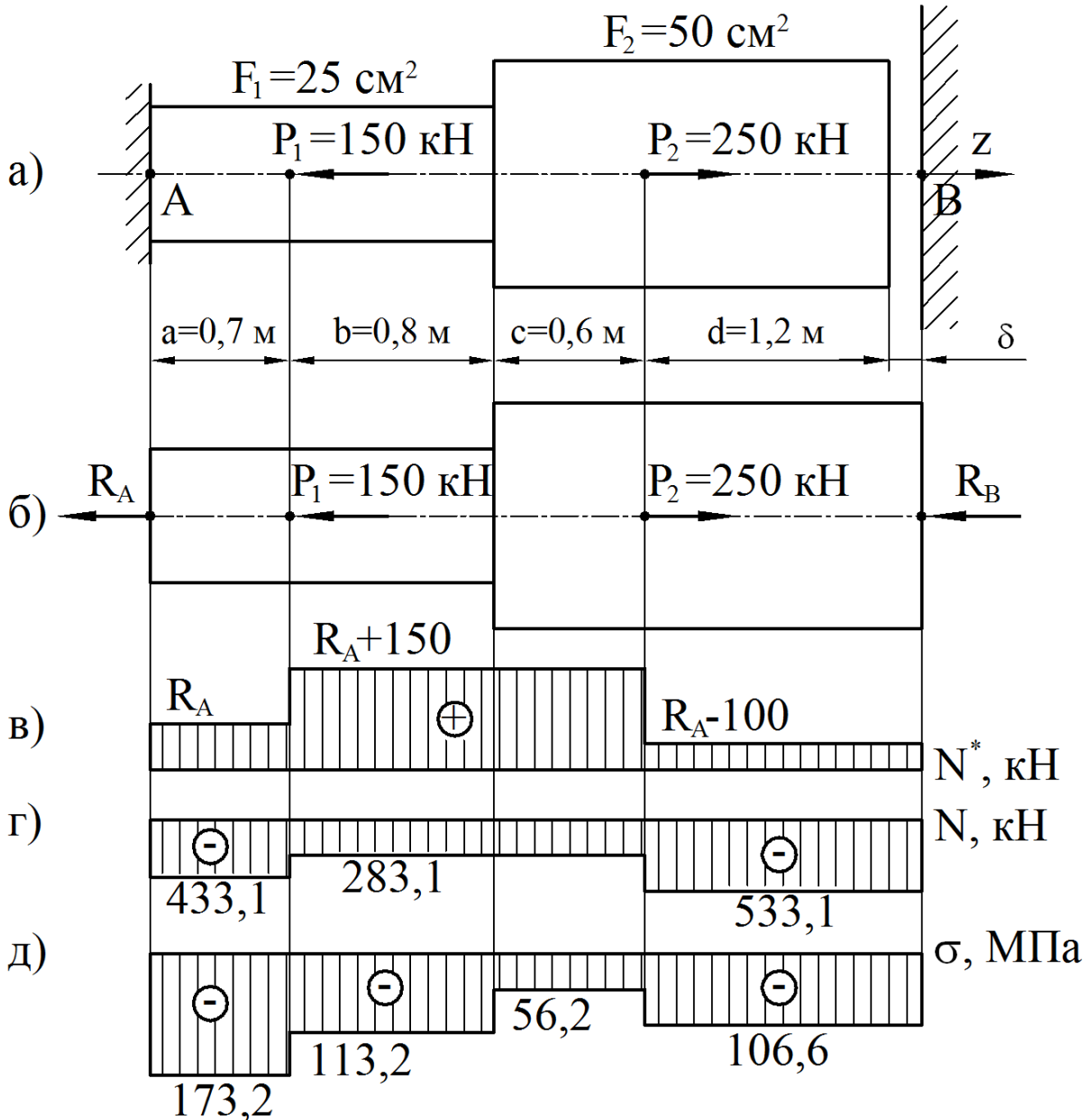
4 Знайти напруження на кожній ділянці:

$$\sigma_i = \frac{N_i}{F_i}. \quad (1.8)$$

5 Побудувати епюру напружень. При оформленні задачі рекомендується рисунок стрижня, попередню і остаточну епюри N та епюру напружень малювати на одному аркуші одну під другою.

1.2.2 Приклад розв'язання задачі 1.2

Для сталевго стрижня (рис. 1.6) побудувати епюри поздовжніх зусиль N і нормальних напружень σ , якщо зазор $\delta = 0,4$ см був до зміни температури $\Delta t = 55^\circ\text{C}$ і прикладення зусиль.



а – задана схема; б – схема сил, які діють на стрижень; в – еюра поздовжніх сил у загальному вигляді; г – еюра поздовжніх сил в числовому значенні; д – еюра нормальних напружень

Рисунок 1.6 – Ступінчатий статично невизначуваний стрижень

Розв’язання. На стрижень AB діють сили вздовж осі. Реакції в жорстких закріпленнях після закриття зазору (тобто реакції R_A і R_B) теж виникають вздовж цієї ж осі.

Таким чином, маємо систему сил з двома невідомими реакціями в закріпленнях R_A і R_B , які діють вздовж однієї лінії і для яких можливо скласти тільки одне рівняння – суму проекцій сил на цю вісь.

Тобто задача є один раз статично невизначуваною. Її розв’язання можливе із застосуванням трьох аспектів задачі – статичного, геометричного і фізичного.

Статичний аспект задачі. Відкидаємо зв’язки (див. рис. 1.6, б), їх вплив заміняємо реакціями R_A і R_B і складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum P_z &= 0; \\ -R_A - P_1 + P_2 - R_B &= 0; \\ -R_A - 150 + 250 - R_B &= 0; \\ R_A + R_B &= 100. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Геометричний аспект задачі. У результаті дії сил та температури зазор закриється і повне подовження стрижня буде дорівнювати δ , тобто

$$\Delta \ell = \delta = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \quad (1.10)$$

Фізичний аспект задачі. За допомогою закону Гука (1.4) деформації виражаємо через зусилля (див. рис. 1.6, в):

$$\begin{aligned} \Delta \ell &= \frac{R_A \cdot 10^{-3} \cdot 0,7}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + \frac{(R_A + 150) \cdot 10^{-3} \cdot 0,8}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + \\ &+ \frac{(R_A + 150) \cdot 10^{-3} \cdot 0,6}{2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} + \frac{(R_A + 150 - 250) \cdot 10^{-3} \cdot 1,2}{2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} + \\ &+ 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 55 \cdot (0,7 + 0,8 + 0,6 + 1,2). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Тепер сумісно розв’язуємо рівняння (1.9)-(1.11), які одержані з розгляду трьох аспектів задачі.

Прирівнюємо вирази (1.10) і (1.11):

$$\Delta \ell = \frac{R_A \cdot 10^{-3} \cdot 0,7}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + \frac{(R_A + 150) \cdot 10^{-3} \cdot 0,8}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(R_A + 150) \cdot 10^{-3} \cdot 0,6}{2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} + \frac{(R_A + 150 - 250) \cdot 10^{-3} \cdot 1,2}{2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} + \\
& + 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 55 \cdot (0,7 + 0,8 + 0,6 + 1,2) = 0,4 \cdot 10^{-3}. \quad (1.12)
\end{aligned}$$

звідки $R_A = -433,1$ кН.

З рівняння (1.9) випливає:

$$R_B = 100 - R_A = 100 + 433,1 = 533,1 \text{ кН.}$$

Реакцію R_B одержали додатною, тобто, як і передбачали, зазор закриється і запрацює праве жорстке закріплення.

Знайшовши реакції в закріпленнях, будуємо епюру поздовжніх сил в числових значеннях (див. рис. 1.6, г).

Напруження на кожній ділянці знаходимо за формулою (1.8):

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{N_1}{F_1} = \frac{-433,1 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-4}} = -173,2 \text{ МПа,} \\
\sigma_2 &= \frac{N_2}{F_2} = \frac{-283,1 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-4}} = -113,2 \text{ МПа,} \\
\sigma_3 &= \frac{N_3}{F_3} = \frac{-283,1 \cdot 10^{-3}}{50 \cdot 10^{-4}} = -56,6 \text{ МПа,} \\
\sigma_4 &= \frac{N_4}{F_4} = \frac{-533,1 \cdot 10^{-3}}{50 \cdot 10^{-4}} = -106,6 \text{ МПа.}
\end{aligned}$$

За знайденими значеннями будуємо (див. рис. 6, д) епюру нормальних напружень σ .

1.3 Статично невизначувана стрижнева система

Абсолютно жорстке тіло закріплено за допомогою системи сталевих стрижнів однакового поперечного перерізу. Приймаючи $[\sigma] = 160$ МПа, визначити діаметр поперечного перерізу стрижнів.

Вихідні дані вибрати з таблиць 1.5, 1.6 і рисунку 1.7.

Таблиця 1.5 – Вихідні дані до задачі 1.3

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M , кН·м	400	200	300	100	400	300	300	100	300	400
P , кН	100	300	150	250	200	100	250	150	200	150
q , кН/м	300	150	100	200	150	250	100	200	250	150

Таблиця 1.6 – Вихідні дані до задачі 1.3

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a , м	0,6	0,5	0,7	0,9	0,8	1,0	0,4	0,7	0,8	0,6
b , м	1,0	0,8	0,5	0,7	0,4	1,3	0,8	0,9	0,7	0,8
c , м	0,5	0,6	0,9	0,8	0,7	1,0	0,5	0,4	0,4	1,2

1.3.1 Методичні вказівки до виконання задачі 1.3

Діаметр поперечного перерізу стрижнів 1 та 2 можна знайти з умови міцності. Стрижні системи, які прикріплені до жорсткого тіла шарнірно, працюють на розтягання або на стискання, для яких умова міцності записується згідно з виразом (1.1). Діаметр стрижнів визначається за формулою (1.3).

Для розкриття статичної невизначуваності необхідно розглянути три аспекти задачі: статичний, геометричний та фізичний.

Статичний аспект задачі. Складаємо рівняння рівноваги, використовуючи ті з них, які не включають реакції опор, в розрахунку яких немає необхідності. Невідомі зусилля бажано спрямовувати заздалегідь від вузлів прикріплення стрижнів, вважаючи їх спочатку розтягненими.

Геометричний аспект задачі. Встановити взаємозв'язок між деформаціями окремих елементів заданої системи.

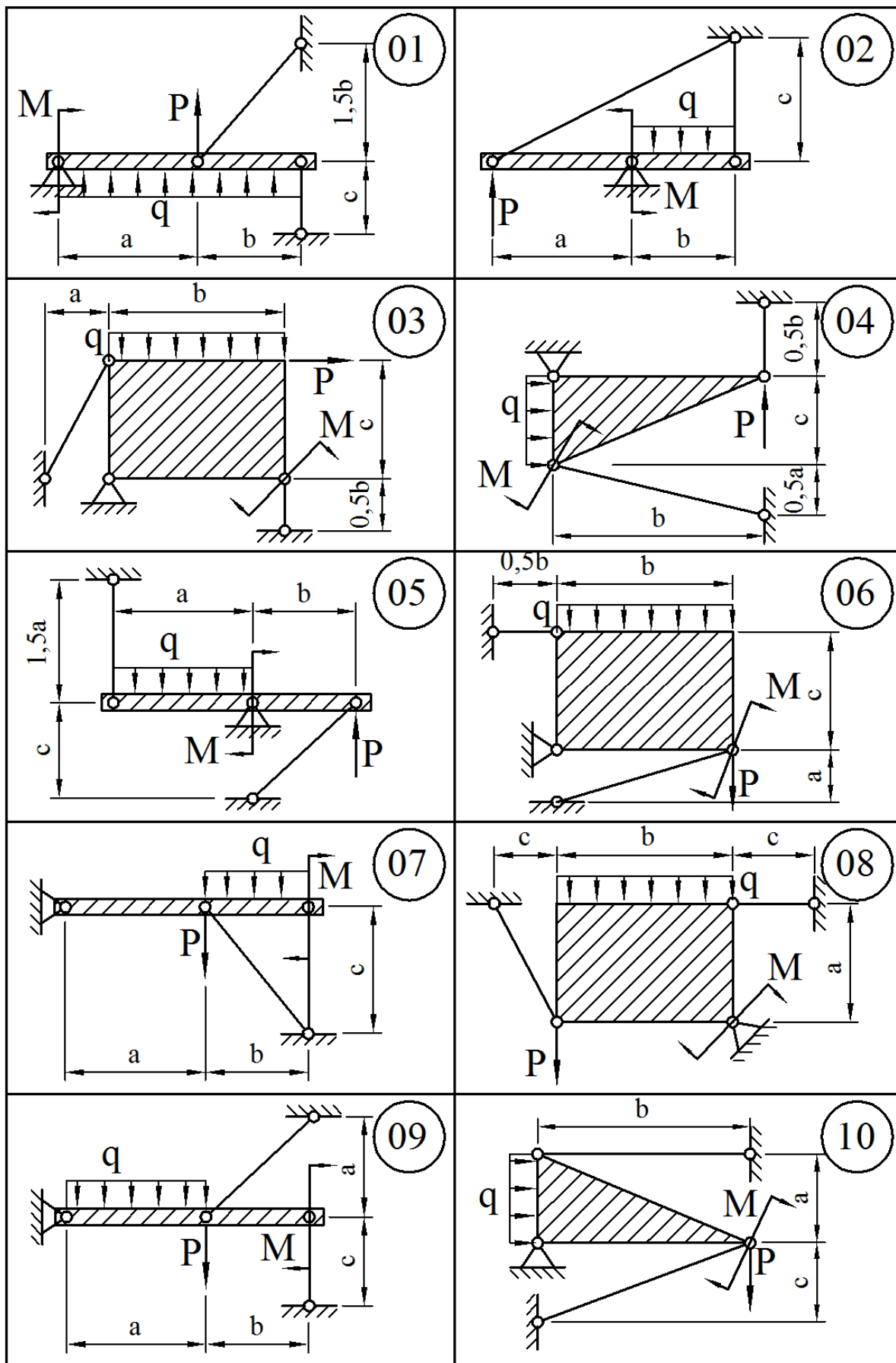


Рисунок 1.7

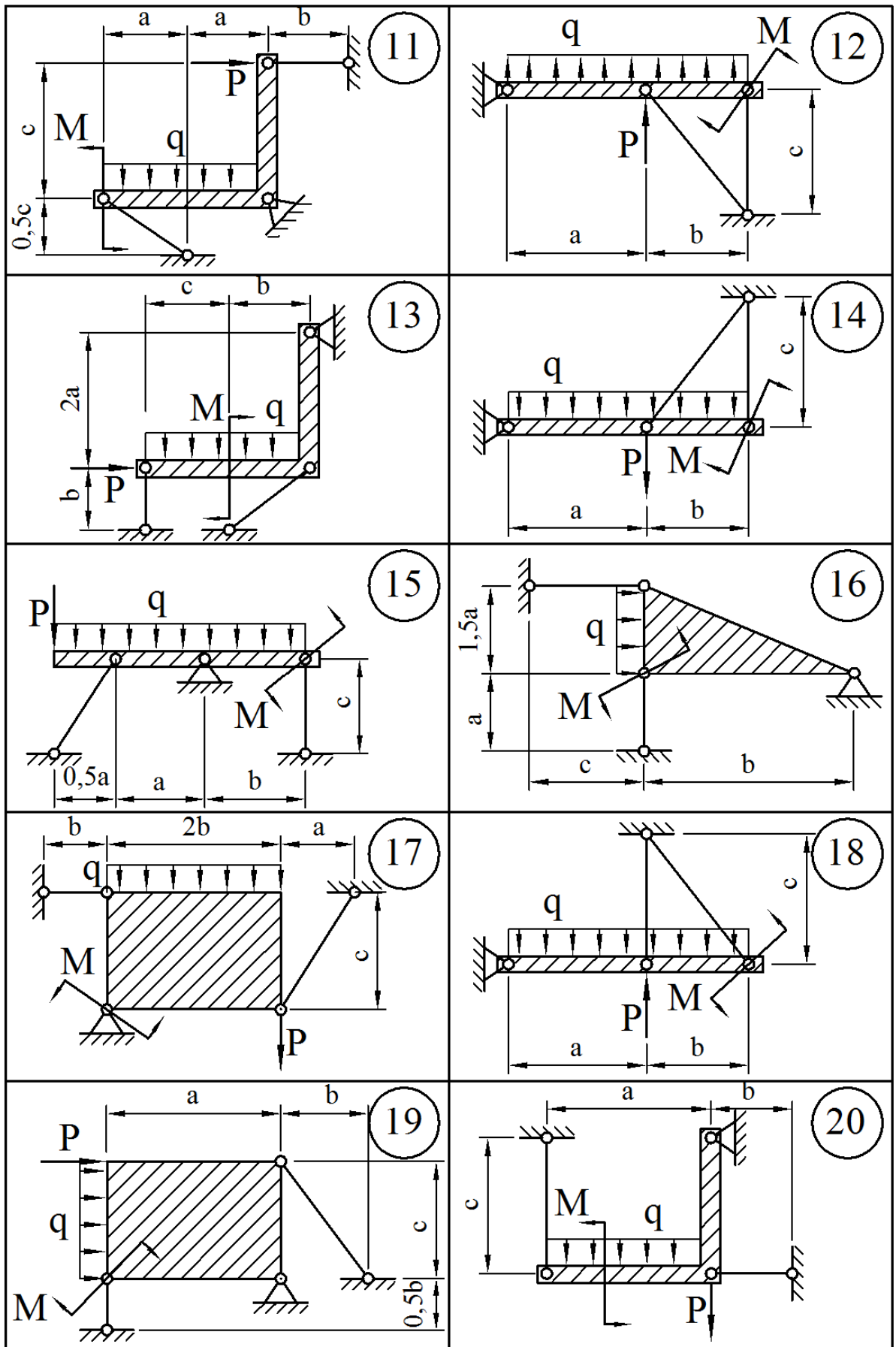


Рисунок 1.7, аркуш 2

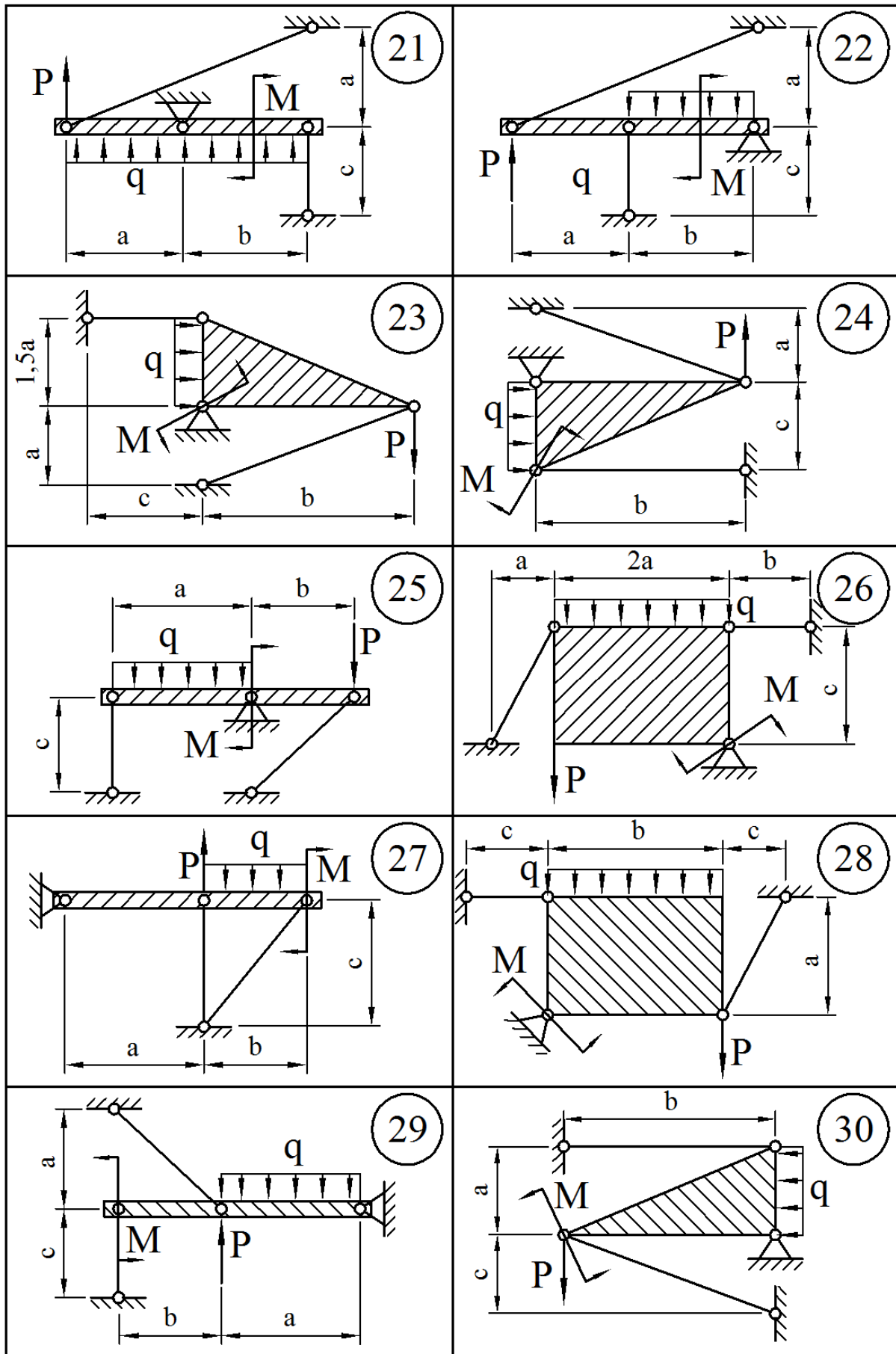


Рисунок 1.7, аркуш 3

Для цього необхідно зобразити положення системи до і після навантаження, задаючи їй можливі переміщення, тобто ті переміщення, які дозволяють мати системі зв'язки.

Якщо система має шарнірно-нерухому опору, то під дією будь-яких факторів система буде повертатися, а точки прикріплення стрижнів при цьому будуть переміщуватися (при умові малих деформацій) перпендикулярно до їх радіусів поворотання (рис. 1.8).

Очевидно, переміщення Δ_i при цьому співвідносяться як радіуси повороту, тобто:

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{r_1}{r_2}; \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_3} = \frac{r_2}{r_3} \quad (1.12)$$

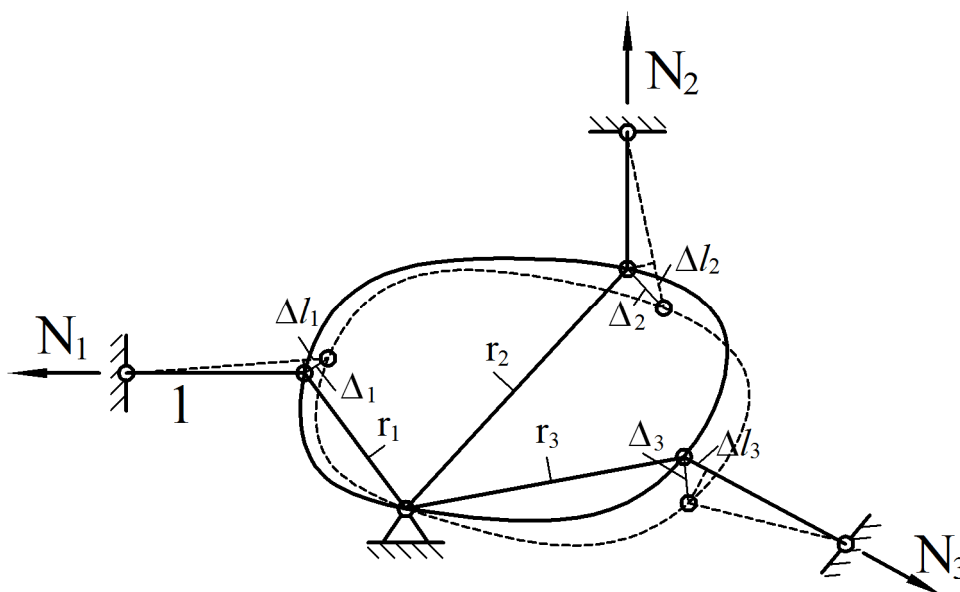


Рисунок 1.8 – Поворот тіла навколо шарнірно-нерухомої опори

Фізичний аспект задачі. За законом Гука необхідно замінити деформацію через зусилля згідно з формулою (1.4). Спрямуємо заздалегідь зусилля від вузлів прикріплення. При цьому в усіх стрижнях зусилля N_i будуть розтягуючі, тобто додатні. Додатнім зусиллям повинно відповідати подовження стрижнів. Якщо якийсь стрижень при навантаженні укорочується, то його деформація буде від'ємною, тобто входить в рівняння сумісності з мінусом.

Синтез. Розв'язати сумісно рівняння рівноваги і рівняння сумісності деформацій, внаслідок чого знайти невідомі зусилля в стрижнях.

Знаючи зусилля і матеріал (допустимі напруження) з умови міцності при розтяганні-стисканні, знайти площі поперечних перерізів стрижнів за виразом (1.2).

Згідно з умовою стрижні мають круглий поперечний переріз. Отже, з виразу (1.3) знаходимо діаметри стрижнів.

1.3.2 Приклад розв'язання задачі 1.3

Абсолютно жорстке тіло закріплено за допомогою системи сталевих стрижнів однакового поперечного перерізу (рис.1.9). Приймаючи $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, визначити діаметр поперечного перерізу стрижнів.

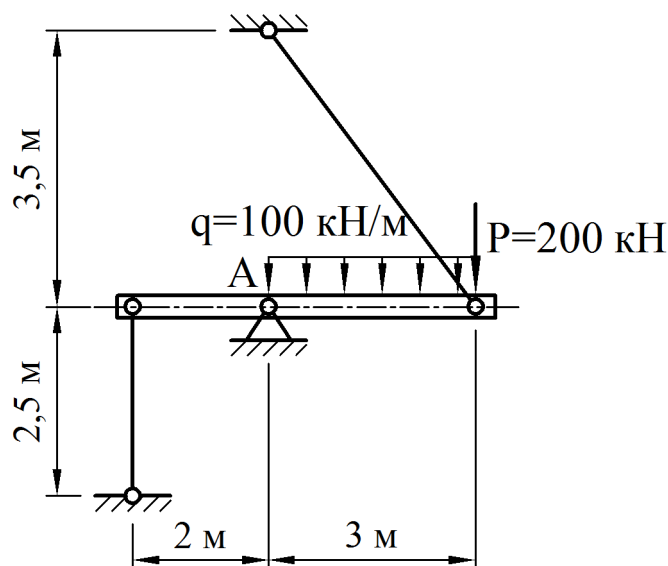


Рисунок 1.9 – Статично невизначувана стрижнева система

Статичний аспект задачі. Відкидаємо зв'язки, їх вплив заміняємо реакціями (рис. 1.10), складаємо рівняння статки.

Складаємо тільки таке рівняння статки, куди входять лише зусилля N_1 і N_2 . Таким рівнянням є сума моментів усіх сил відносно точки А.

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0; \\ -P \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1,5 + N_1 \cdot 2 + N_2 \sin \alpha \cdot 3 &= 0; \\ -200 \cdot 3 - 100 \cdot 3 \cdot 1,5 + N_1 \cdot 2 + N_2 \sin \alpha \cdot 3 &= 0; \end{aligned}$$

$$2N_1 + 2,277N_2 = 1050; \quad (1.13)$$

де синус кута α знаходимо з трикутника ABD (рис. 1.11).

$$\begin{aligned} \ell_2 = BD &= \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{3^2 + 3,5^2} = 4,61 \text{ м}; \\ \sin \alpha &= \frac{3,5}{\ell_2} = \frac{3,5}{4,61} = 0,759. \end{aligned}$$

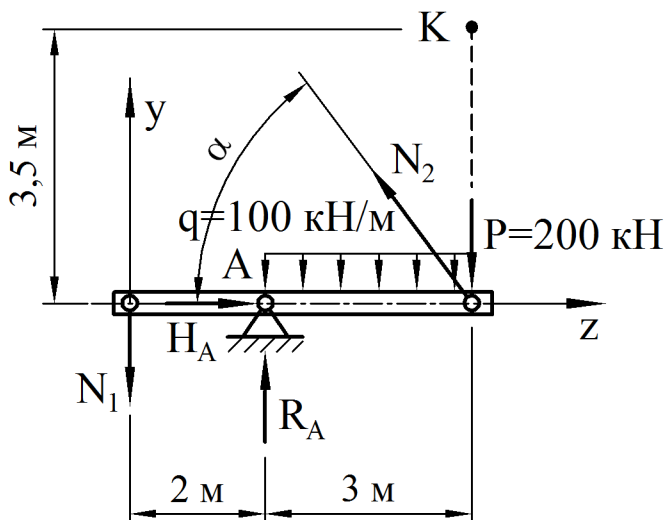


Рисунок 1.10 – Статично невизначувана стрижнева система з реакціями замість зв'язків

Геометричний аспект задачі. Показуємо систему в деформованому стані (рис. 1.11). Балка BC абсолютно жорстка, вона не деформується, а тільки повертається навколо нерухомої точки A. Показуємо подовження стрижнів.

Подовження першого стрижня $\Delta\ell_1$ є відрізок CC_1 , подовження другого стрижня $\Delta\ell_2$ є відрізок B_1B_2 . Точка B_2 знаходиться на перетині прямої DB_1 і перпендикуляра з точки B до прямої DB_1 . Встановлюємо зв'язок між $\Delta\ell_1$ і $\Delta\ell_2$. Трикутники ACC_1 та ABB_1 подібні, звідки витікає

$$\begin{aligned} \frac{CC_1}{AC} &= \frac{BB_1}{AB}; \quad CC_1 = \Delta\ell_1; \quad BB_1 = \frac{B_1B_2}{\sin \alpha} = \frac{\Delta\ell_2}{\sin \alpha}; \\ \frac{\Delta\ell_1}{2} &= \frac{\Delta\ell_2}{3 \sin \alpha}; \quad \frac{\Delta\ell_1}{2} = \frac{\Delta\ell_2}{3 \cdot 0,759}; \end{aligned}$$

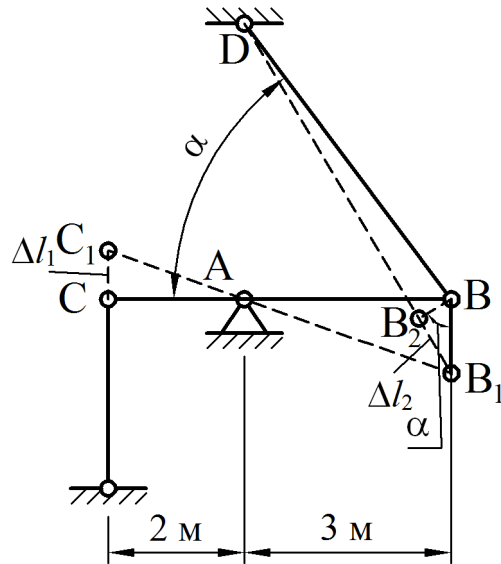


Рисунок 1.14 – Деформована схема стрижневої системи

$$\Delta l_1 = 0,878 \Delta l_2. \quad (1.14)$$

Фізичний аспект задачі. За допомогою закону Гука (1.4) деформації виражаємо через зусилля:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \ell_1}{EF_1} = \frac{N_1 \cdot 2,5}{EF_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \ell_2}{EF_2} = \frac{N_2 \cdot 4,61}{EF_2}. \quad (1.15)$$

При цьому необхідно мати на увазі, що при записі закону Гука необхідно брати знак «плюс», якщо напрямок деформації співпадає з напрямком зусилля, і «мінус», якщо не співпадає.

Тепер сумісно розв'язуємо рівняння, які одержані з розгляду трьох аспектів задачі. У вираз (1.14) підставляємо Δl_1 і Δl_2 із залежностей (1.15). За умовою задачі $F_1 = F_2 = F$

$$\frac{N_1 \cdot 2,5}{EF_1} = 0,878 \cdot \frac{N_2 \cdot 4,61}{EF_2}.$$

За умовою задачі $F_1 = F_2 = F$, звідки

$$\frac{N_1 \cdot 2,5}{EF} = 0,878 \cdot \frac{N_2 \cdot 4,61}{EF},$$

$$N_1 = \frac{0,878 \cdot 4,61}{2,5} \cdot N_2,$$

$$N_1 = 1,619 N_2, \quad (1.16)$$

Завдяки розгляду геометричного і фізичного аспектів задачі одержали залежність між зусиллями N_1 і N_2 (1.16), яку підставляємо в рівняння (1.13).

$$2 \cdot 1,619 N_2 + 2,277 N_2 = 1050;$$

$$N_2 = 190,4 \text{ кН.}$$

Знайдене зусилля N_2 підставляємо в залежність (1.16) і знаходимо N_1 :

$$N_1 = 1,619 \cdot 190,4 = 308,2 \text{ кН.}$$

Знаходимо реакції у точці A .

Зусилля H_A знаходимо із суми проєкцій на горизонтальну вісь

$$\sum P_z = 0;$$

$$H_A - N_2 \cos \alpha = 0;$$

$$H_A = N_2 \cos \alpha = 190,4 \cdot 0,651 = 124,0 \text{ кН,}$$

де косинус кута α знаходимо з трикутника ABD (див. рис. 1.11).

$$\cos \alpha = \frac{3}{\ell_2} = \frac{3}{4,61} = 0,651.$$

Зусилля R_A знаходимо із суми проєкцій на вертикальну вісь

$$\sum P_y = 0;$$

$$-P - q \cdot 3 - N_1 + N_2 \cdot \sin \alpha + R_A = 0;$$

$$R_A = P + q \cdot 3 + N_1 - N_2 \cdot \sin \alpha = 200 + 100 \cdot 3 + 308,2 - 190,4 \cdot 0,759 = 663,7 \text{ кН.}$$

Тепер виконаємо перевірку, чи вірно ми знайшли зусилля N_1 , N_2 , H_A і R_A . Для перевірки необхідно брати тільки ті рівняння, які ми не використовували при знаходженні зусиль.

$$\sum M_K = 0;$$

$$q \cdot 3 \cdot 1,5 + N_1 \cdot 5 - N_2 \cos \alpha \cdot 3,5 - R_A \cdot 3 + H_A \cdot 3,5 = 0;$$

$$100 \cdot 3 \cdot 1,5 + 308,2 \cdot 5 - 190,4 \cdot 0,651 \cdot 3,5 - 663,7 \cdot 3 + 124,0 \cdot 3,5 = 0;$$

$$2425 - 2424,9 \approx 0.$$

Похибка складає $\frac{2425 - 2424,9}{2424,9} \cdot 100\% = 0,004\%$, що є допустимим.

Тепер за допомогою формули (1.2) визначаємо площу поперечного перерізу стрижнів. Розрахунок ведемо по більш навантаженому стрижню.

$$F \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]} = \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{308,2 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 19,26 \text{ см}^2;$$

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 19,26}{3,14}} = 4,95 \text{ см.}$$

Приймаємо остаточно з рекомендованого ряду $d = 50$ мм.

2 ПОБУДОВА ЕПЮР ВНУТРІШНІХ ЗУСИЛЬ ДЛЯ БАЛОК ТА РАМ

2.1 Консольна балка (задача 2.1) та двохопорна балка (задача 2.2)

Для заданих балок (рис. 2.1 та 2.2) побудувати епюри поперечних сил Q і згинальних моментів M .

Вихідні дані вибрати з таблиць 2.1 та 2.2 і рисунків 2.1 та 2.2.

Таблиця 1.2 – Вихідні дані для задач 2.1–2.4

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M , кН·м	12	14	16	18	20	18	16	14	12	16
P , кН	5	6	7	8	5	6	7	8	7	6
q , кН/м	3	2	4	5	4	3	2	5	3	4

Таблиця 2.2 – Вихідні дані для задач 2.1–2.4

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a , м	2,0	3,0	2,4	2,8	1,6	1,8	2,4	1,8	1,6	1,4
b , м	1,6	1,8	1,2	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	2,6	2,4
c , м	1,2	1,4	1,6	1,8	1,5	2,2	2,4	2,6	2,5	2,7
d , м	1,5	1,3	1,4	2,0	2,4	2,8	3,0	1,5	3,4	4,0

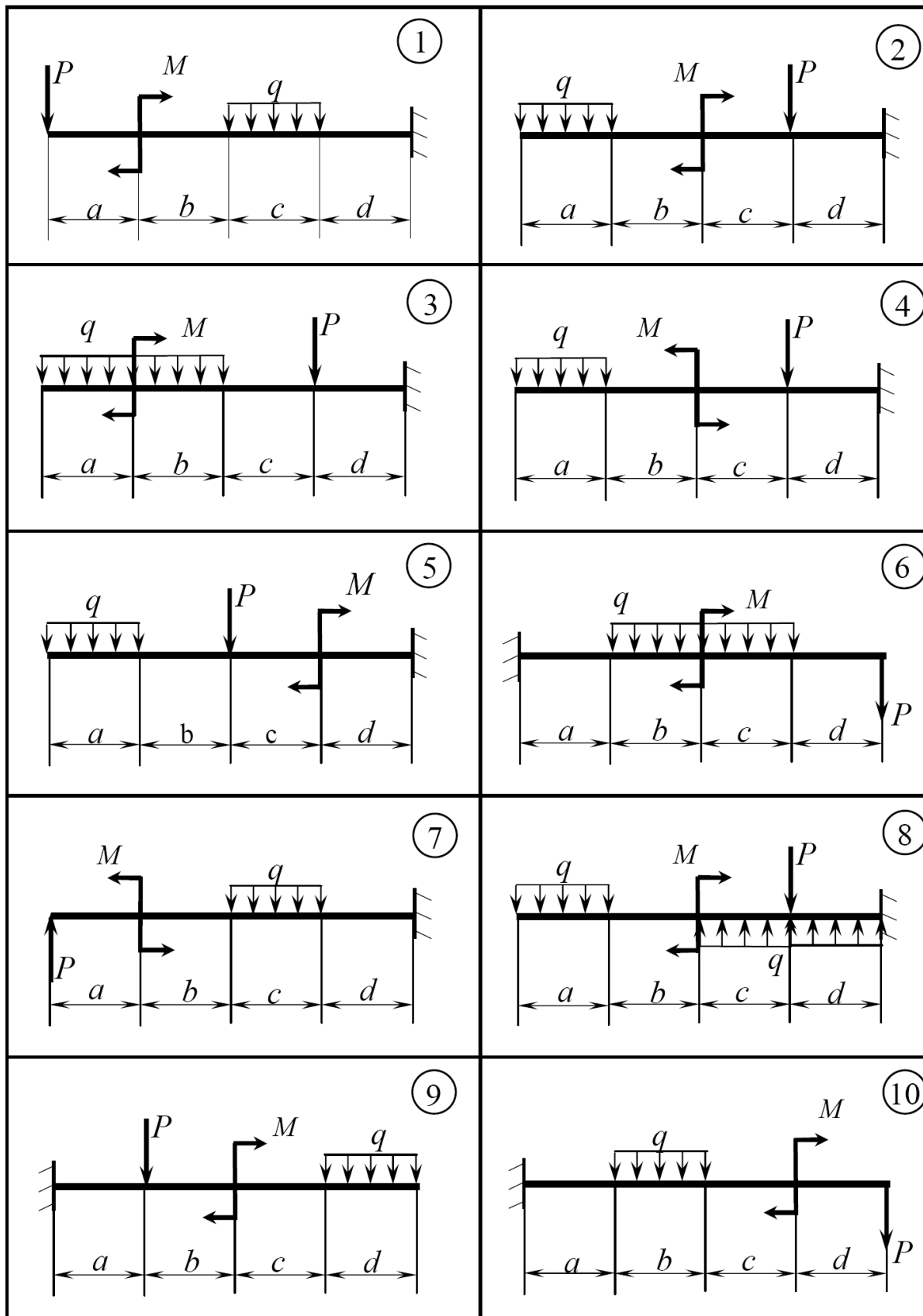


Рисунок 2.1

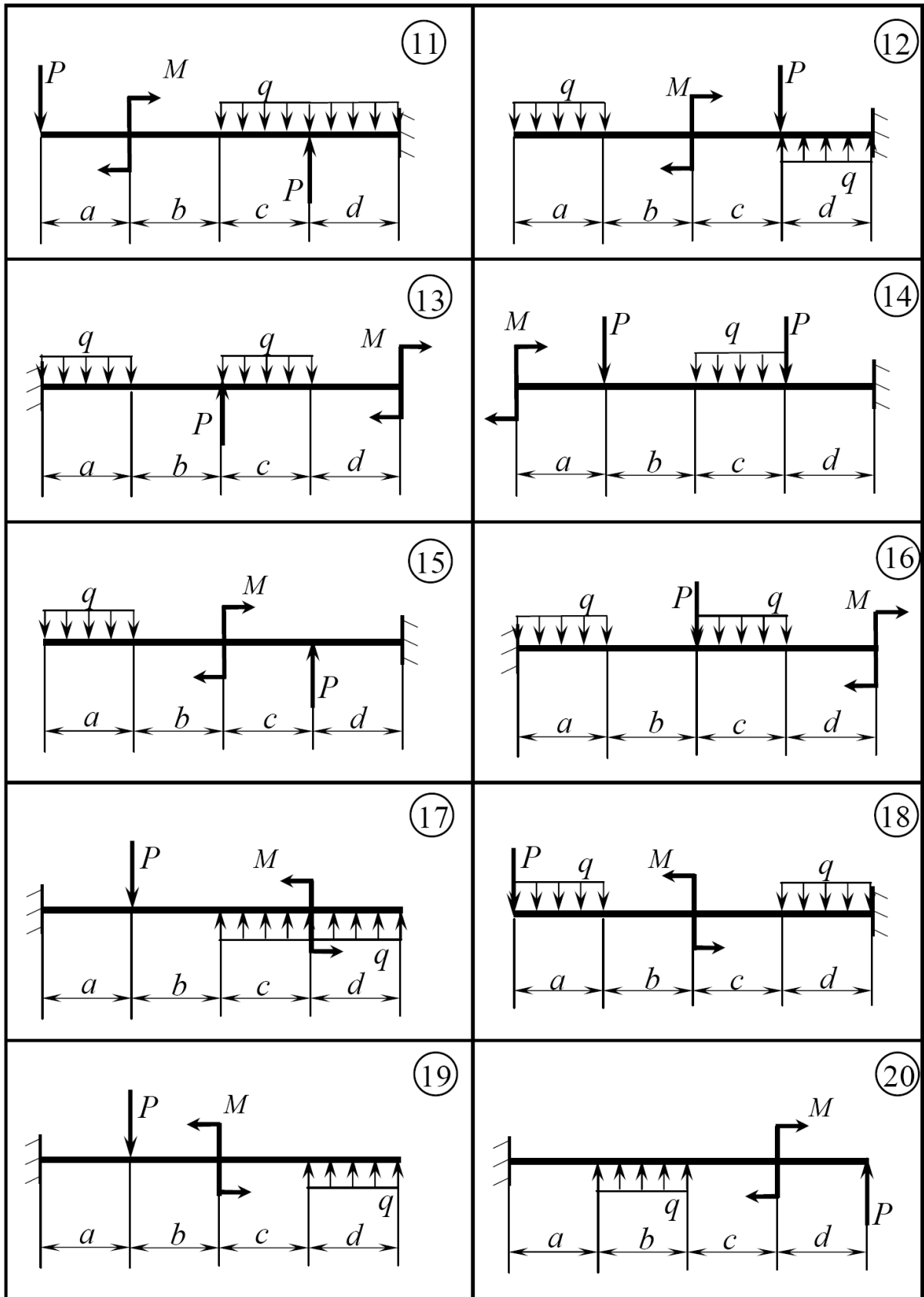


Рисунок 2.1, аркуш 2

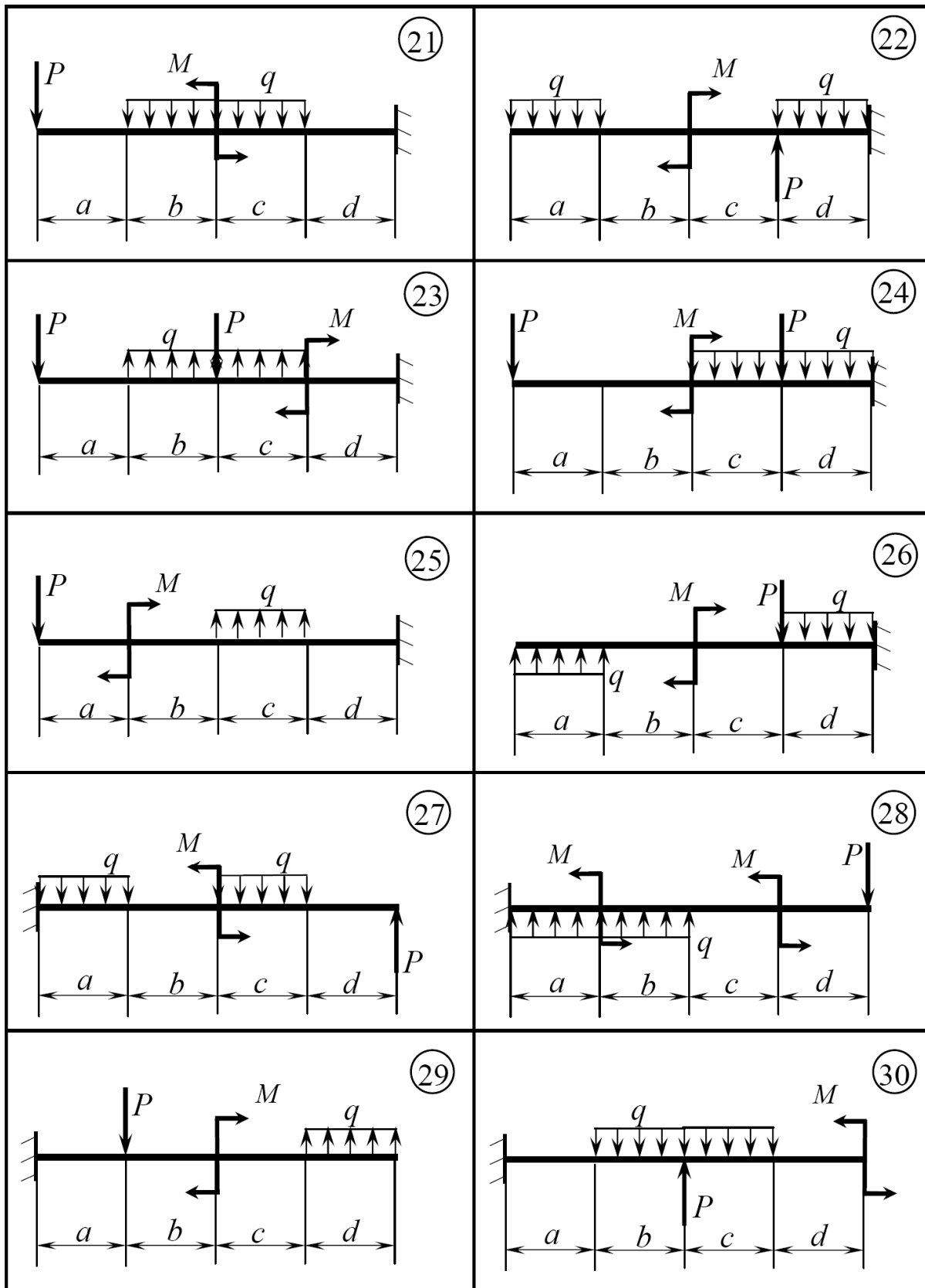


Рисунок 2.1, аркуш 3

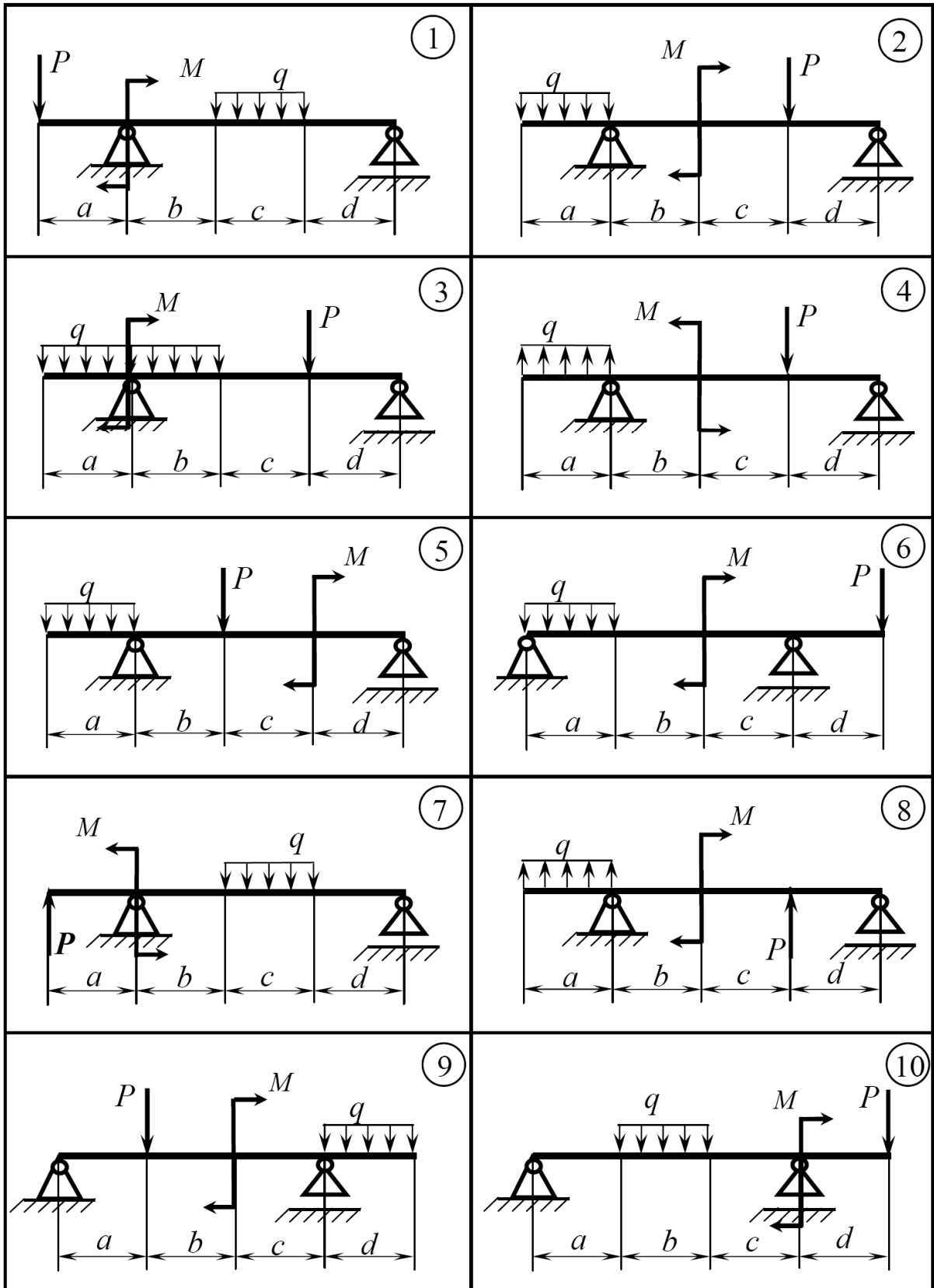


Рисунок 2.2

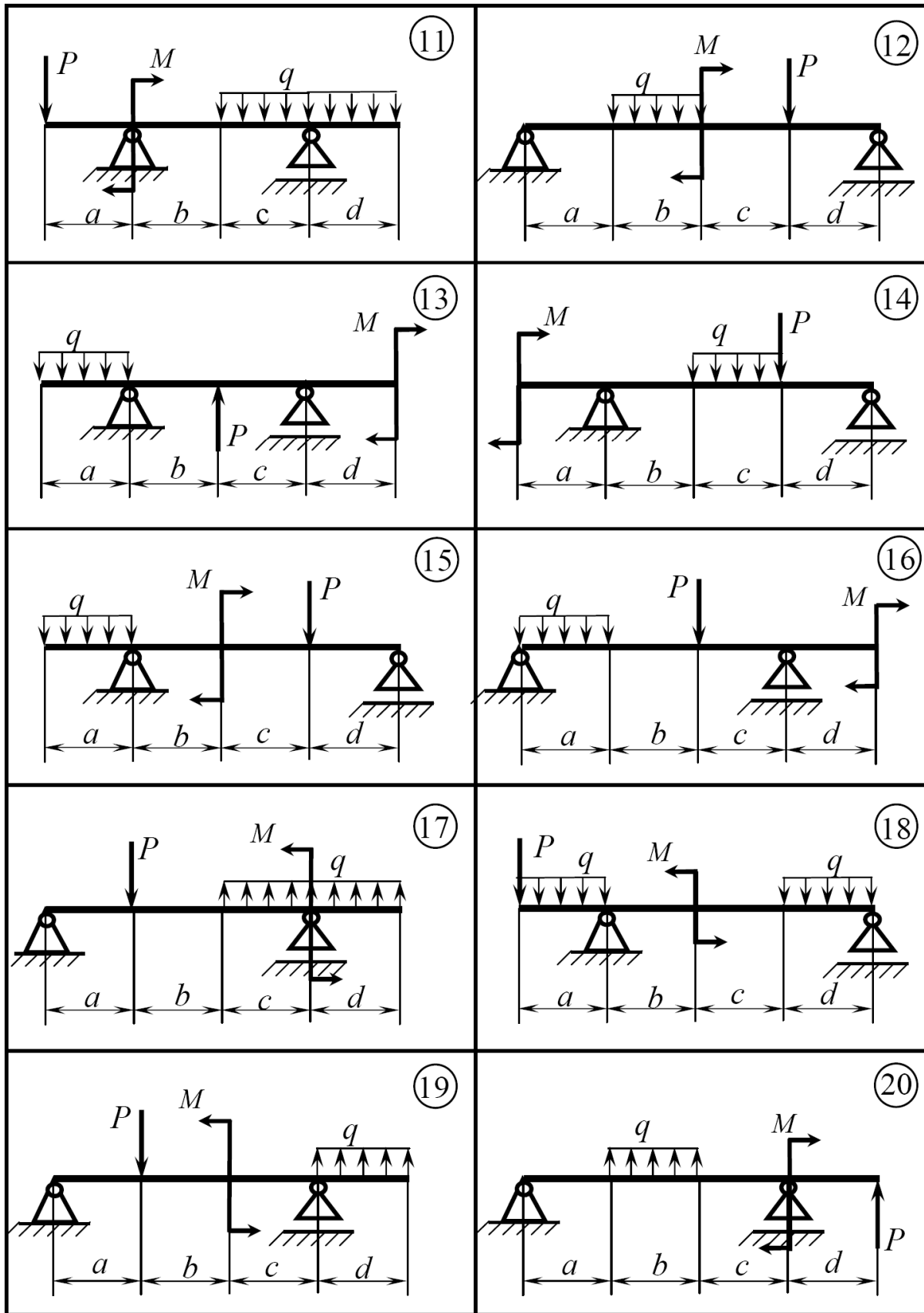


Рисунок 2.2, аркуш 2

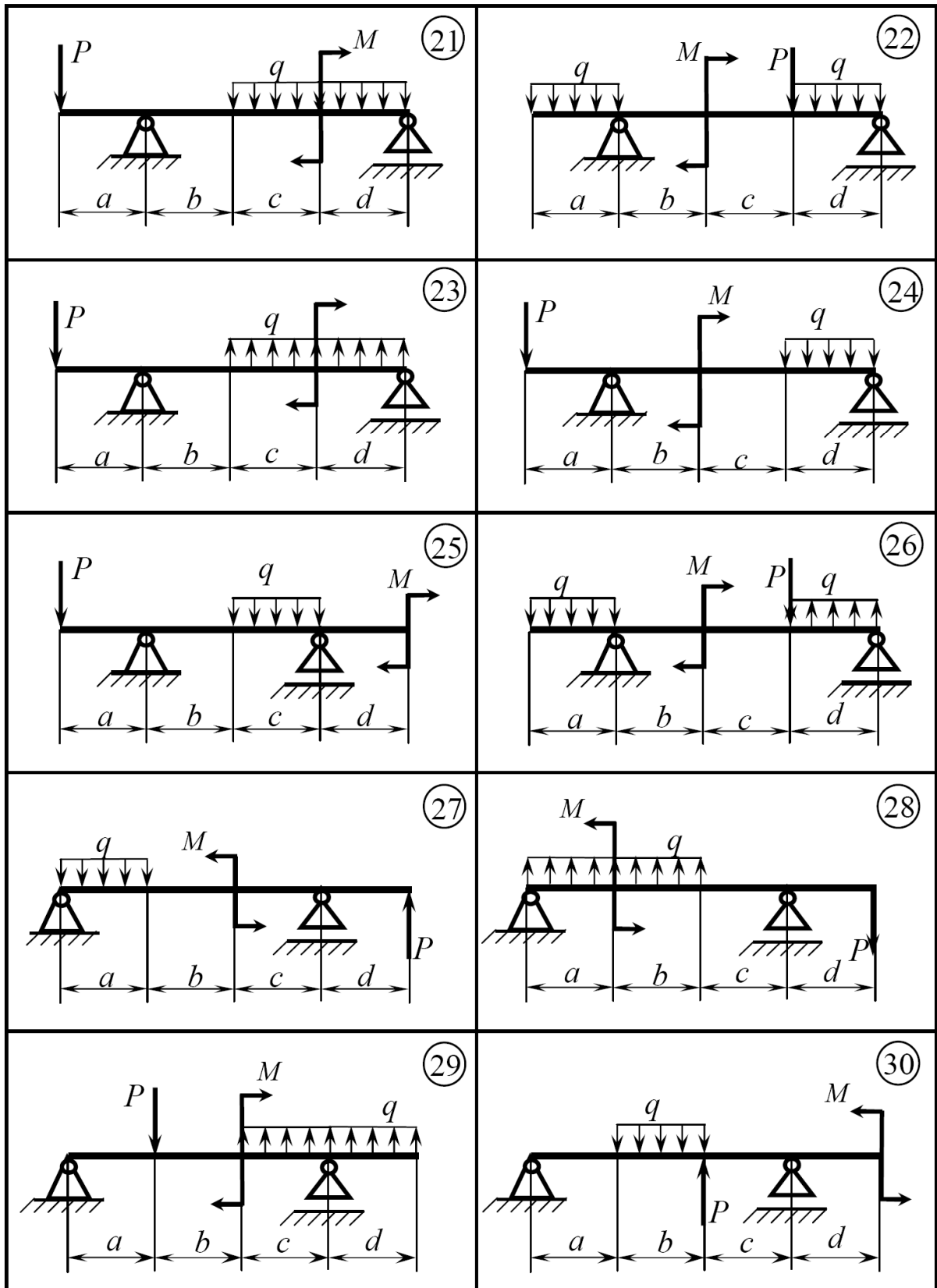


Рисунок 2.2, аркуш 3

2.1.1 Методичні вказівки до виконання задач 2.1 та 2.2

Балка – це стрижень, який працює на згинання.

Зовнішні навантаження, що діють на балку, зводяться до зосереджених сил P (кН або МН), пар сил M (кН·м або МН·м) і рівномірно чи нерівномірно розподілених по довжині балки навантажень з інтенсивністю q (кН/м або МН/м).

При впливі зовнішніх навантажень у будь-якому перерізі балки можуть виникнути два внутрішніх зусилля: поперечна сила Q і згинальний момент M .

Поперечна сила Q дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на перпендикуляр до осі стрижня усіх зовнішніх сил, які розташовані з одного боку від перерізу.

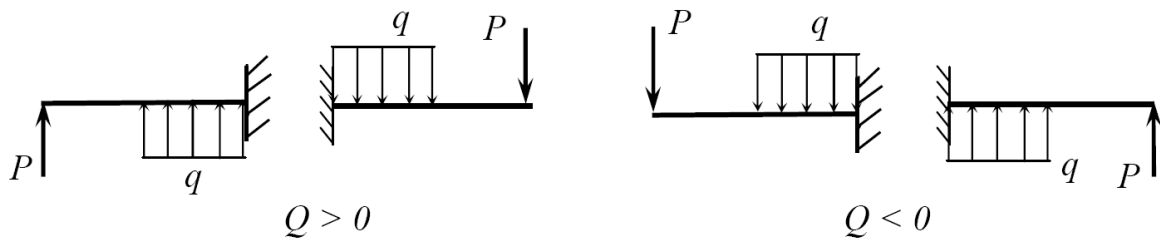


Рисунок 2.3

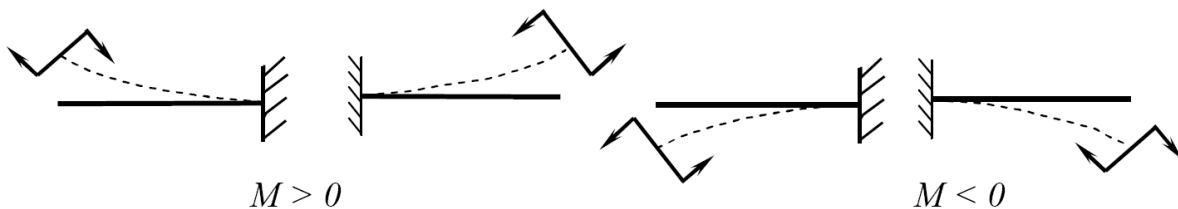


Рисунок 2.4

Згинальний момент M дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх зовнішніх сил з одного боку від перерізу, який розглядаємо, щодо центра ваги цього перерізу.

Встановимо такі правила знаків для Q і M в балках:

Поперечна сила Q у перерізі вважається додатною, якщо зовнішня сила діє відносно перерізу за напрямком руху годинникової стрілки (рис. 2.3).

Згинальний момент M у перерізі вважається додатнім, якщо він викликає стиск верхніх волокон балки (рис. 2.4).

З огляду на правила знаків для M варто підкреслити, що *епюру згинальних моментів будують на стиснутих волокнах.*

2.1.2 Правила побудови епюр поперечних сил та згинальних моментів

1 На ділянках, де немає розподіленого навантаження, епюри Q окреслюються прямими, паралельними базі, а епюри M в загальному випадку – похилими прямими.

2 На ділянках, де до балок прикладене рівномірно розподілене навантаження q , епюра Q обмежується похилою прямою, а епюра M – квадратичною параболою. Оскільки епюру M будуюмо на стиснутих волокнах, то випуклість параболи звернена в бік, протилежний напрямку дії розподіленого навантаження q .

3 У перерізі, де $Q = 0$, дотична до епюри M паралельна базі епюри, тобто епюра M досягає екстремального значення.

Якщо, “рухаючись” зліва направо, Q переходить через нуль, змінюючи знак з $\langle\langle + \rangle\rangle$ на $\langle\langle - \rangle\rangle$, то $M = M_{max}$, а при зміні знака з $\langle\langle - \rangle\rangle$ на $\langle\langle + \rangle\rangle$ – $M = M_{min}$.

Координату z перерізу, де $Q=0$, зручно обчислювати за формулою:

$$z_{extr} = z_l + z_0; \quad z_0 = \frac{Q_l}{q}; \quad h - z_0 = \frac{Q_{np}}{q},$$

де z_0 – відрізок ділянки, де $q \neq 0$, від лівого краю ділянки до перерізу, де $Q = 0$;

h – довжина ділянки;

Q_l та Q_{np} – значення поперечної сили відповідно з лівого ($z = z_l$)

та з правого ($z = z_{np}$).

4 На ділянках, де $Q > 0$, момент зростає, де $Q < 0$, момент зменшується.

5 У перерізі, де до балки прикладені зосереджені сили:

а) на епюрі Q будуть “стрибки” на значення прикладених сил з урахуванням їх знаків (якщо будувати епюру, “рухаючись” зліва направо, то напрямом “стрибка” буде співпадати з напрямком вектора сили);

б) на епюрі M будуть злами, причому вістря зламу спрямоване проти дії сили.

6 У перерізі, де до балки прикладені зосереджені моменти, на епюрі M будуть “стрибки” на значення цих моментів. Напрямок стрибка залежить від напрямку зовнішнього моменту. Лінії епюри до стрибка і за ним – паралельні. В той же час на епюрі Q змін не буде. Зазначимо, що це не стосується випадку, коли в одній точці прикладені сила і момент. В цьому випадку сила спричиняє злам і порушує паралельність на епюрі M , а епюрі Q – стрибок згідно з правилом 5.

7 Якщо на кінці консолі або в кінцевій опорі до балки прикладений зосереджений момент, то в цьому перерізі згинальний момент дорівнює зовнішньому моменту. Якщо ж у кінцевій шарнірній опорі або на кінці консолі балка не навантажена зовнішнім моментом, то в них $M=0$, що має місце найчастіше.

8 Епюра Q є діаграмою, похідною від епюри моментів. Отже, ординати епюри Q пропорційні тангенсу кута нахилу дотичної до епюри M .

Епюра будується на базовій лінії (або на базі), яка співпадає з віссю стрижня і на якій значення всіх внутрішніх зусиль дорівнюють нулю. Додатні ординати будемо відкладати вверх від базової лінії, а від’ємні – вниз.

Найзручніше будувати епюри Q і M за характерними перерізами.

Характерними перерізами вважаються перерізи, у яких прикладені зосереджені сили чи зосереджені моменти, починається чи закінчується розподілене навантаження, перерізи, у яких Q дорівнює нулю, а також у місцях зміни напрямку осі стрижня чи величини його поперечного перерізу.

Характерні перерізи проводять як зліва, так і справа на нескінченно малій відстані від точок, де прикладають сили, моменти, тощо, і позначаються, як правило, цифрами.

Можна рекомендувати такий порядок побудови епюр:

Знайти опорні реакції (для консолі реакції можна не знаходити і будувати епюру від “вільного” кінця балки).

Визначити характерні перерізи.

Обчислити значення Q у характерних перерізах, потім, “рухаючись” уздовж балки (бажано зліва направо), побудувати епюру Q , використовуючи вищеописані правила.

Обчислити значення M в характерних перерізах. Побудувати епюру M за цими значеннями, використовуючи одночасно вищеописані правила.

Перевірка вірності побудови епюри Q і M для двохопорних балок зводиться до побудови епюри при “русі” у напрямку протилежному первісному (наприклад, справа наліво). Крім цього варто звернути увагу на напрямки стрибків і нахилів прямих на епюрі M . Таку перевірку для балок проводять за допомогою рівняння :

$$M(2) - M(1) = S_Q, \quad (2.1)$$

де $M(2)$ та $M(1)$ – значення згинальних моментів відповідно в кінцевій та початковій точках ділянки епюри M ;

S_Q – площа відповідної ділянки епюри Q .

Різниця двох перевірок спричинена тим, що для консольних балок значення реакцій сил та моментів в затисненні невідомі, тому перевірку за допомогою побудови епюр справа наліво зробити неможливо.

2.1.3 Приклад розв’язання задачі 1 (схема без екстремуму)

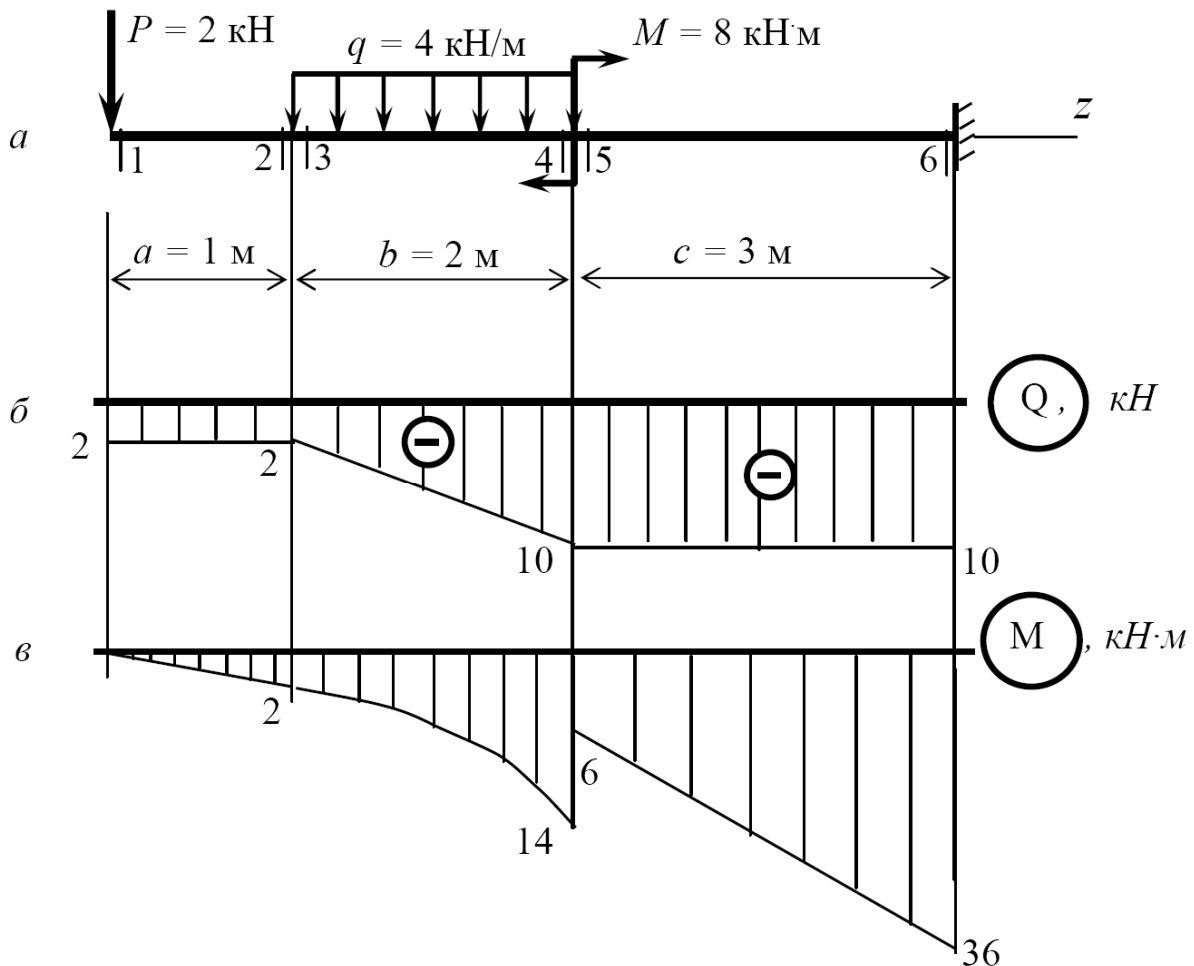
Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для консольної балки (рис. 2.5, а).

Розв’язання. У цьому прикладі балка закріплена тільки одним кінцем, тому будують епюри з «вільного» кінця. Реакції в затисненні можна не знаходити. Будемо будувати епюру рухаючи зліва направо. Позначимо на балці характерні перерізи (див. рис. 2.5, а) за правилами, які зазначені вище.

Визначимо поперечні сили в характерних перерізах:

$$Q_1 = -P = -2\text{кН}; \quad Q_2 = Q_1; \quad Q_3 = -P - q \cdot \Delta z = Q_1 (\Delta z \rightarrow 0);$$

$$Q_4 = -P - q \cdot b = -2 - 8 = -10\text{кН}; \quad Q_5 = Q_6 = Q_4.$$



*a – задана схема; б – епюра поперечних сил;
в – епюра згинальних моментів
Рисунок 2.5 – Консольна балка*

Побудуємо епюру поперечних сил Q , для чого відкладемо результати розрахунків у вигляді окремих ординат (з урахуванням масштабів) від базової лінії (див. рис. 2.5, б). З'єднаємо добуті точки прямими лініями, враховуючи правила, які наведені вище.

Оскільки на ділянках 1...2 та 5...6 розподільного навантаження немає, то (див. правило 1) епюра Q окреслюються прямими, паралельними базі. На ділянці 3...4, де діє розподільне навантаження інтенсивністю q , епюра Q обмежується похилою прямою (див. правило 2).

Визначимо згинальні моменти в характерних перерізах:

$$M_1 = P \cdot \Delta z \approx 0; M_2 = -P \cdot a = 2 \cdot 1 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = M_2 = -2 \text{кН} \cdot \text{м}; \quad M_4 = P(a+b) - q \cdot b \frac{b}{2} = -2(1+2) - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -14 \text{кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = M_4 + M = -14 + 8 = -6 \text{кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6 = -P(a+b+c) - q \cdot b \left(\frac{b}{2} + c \right) + M = -2(1+2+3) - 4 \cdot 2 \left(\frac{2}{2} + 3 \right) + 8 = -36 \text{кН} \cdot \text{м}.$$

Побудуємо епюру згинальних моментів M , для чого відкладемо результати розрахунків у вигляді окремих точок (з урахуванням масштабів) від базової лінії (див. рис. 2.5, в). Згідно з правилом 1, на ділянках 1...2 та 5...6, де розподільного навантаження немає, епюри M окреслюються похилими прямими. На ділянці 3...4, де діє розподільне навантаження інтенсивністю q , епюра M обмежується квадратичною параболою, випуклість якої звернена в бік, протилежний напрямку дії розподіленого навантаження q , тобто вверх.

2.1.4 Приклад розв'язання задачі 2.1 (схема з екстремумом)

Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для консольної балки (рис. 2.6, а).

Розв'язання. У цьому прикладі, як і в попередньому, балка закріплена тільки одним кінцем, тому будувати епюру краще з “вільного” кінця.

Означимо на балці характерні перерізи.

Для побудови епюри Q визначимо поперечні сили в характерних перерізі, “рухаючись” справа наліво.

У перерізі 1 та 2 немає зовнішніх сил, а момент M , як пара сил, дає нульову проекцію на вісь y , тому

$$Q_1 = Q_2 = 0.$$

У перерізі 3 з'являється сила $P = 2$ кН, яка прагне повернути відсічену частину балки за рухом годинникової стрілки, тому

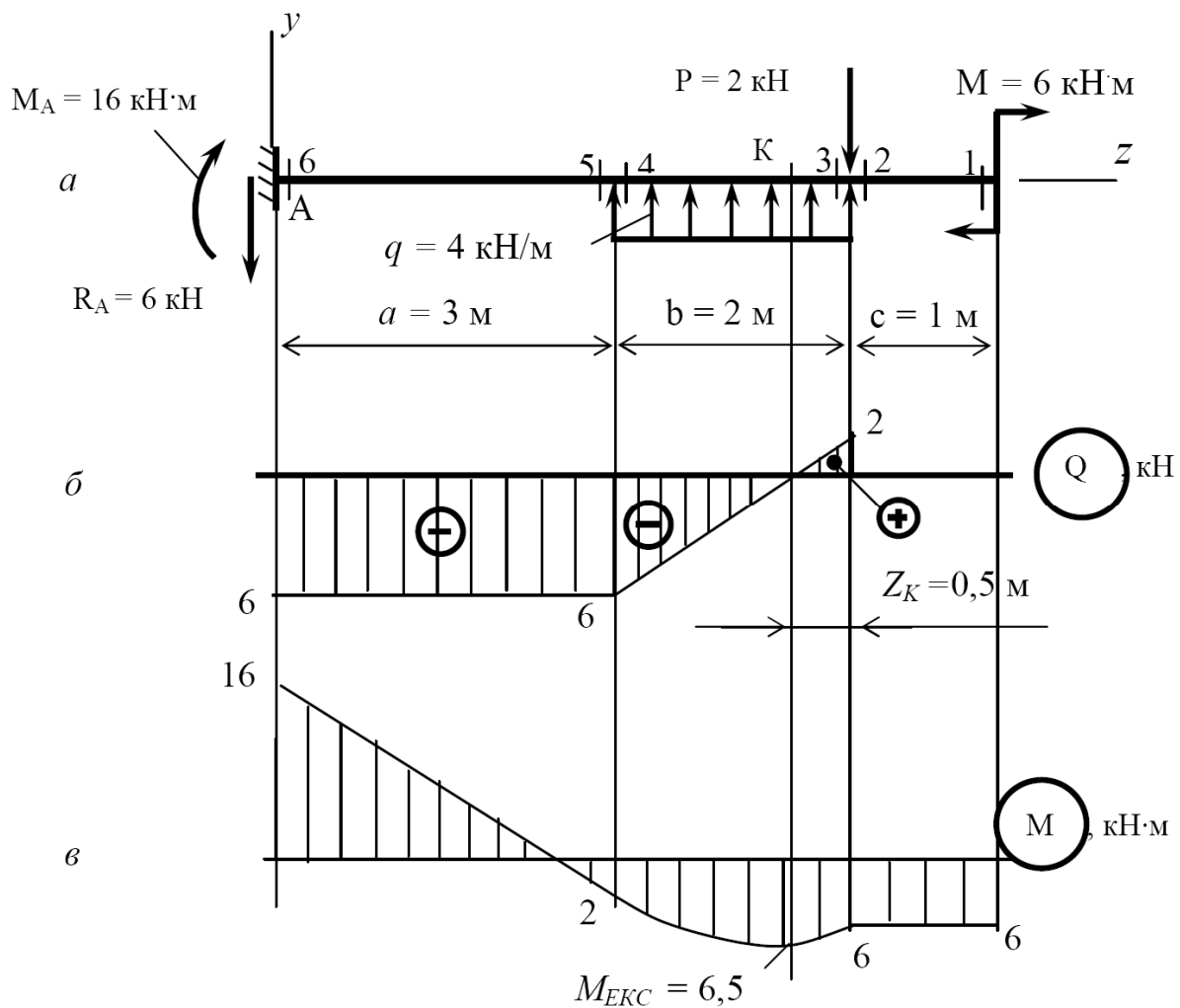
$$Q_3 = P = 2 \text{кН}.$$

На ділянці 3...4 розподілене навантаження q прагне повернути відсічену частину балки проти ходу годинникової стрілки, тому поперечна сила буде від'ємною:

$$Q_4 = P - q \cdot 2 = 2 - 4 \cdot 2 = -6 \text{ кН.}$$

На ділянці 5...6 додаткові зовнішні зусилля не з'являються, крім P та q , тому

$$Q_5 = Q_6 = Q_4 = -6 \text{ кН.}$$



a – задана схема; b – епюра поперечних сил; $в$ – епюра згинальних моментів

Рисунок 2.6 – Консольна балка

Побудуємо епюру поперечних сил Q (див. рис. 2.6, б).

Для цього відкладемо результати розрахунків у вигляді окремих ординат (з урахуванням масштабів) від базової лінії. З'єднаємо добуті точки прямими лініями, враховуючи правила, які наведені вище.

Оскільки на ділянках 1...2 та 5...6 розподільного навантаження немає, то (див. правило 1) епюра Q окреслюється прямими, паралельними базі. На ділянці 3...4, де діє розподільне навантаження інтенсивністю q , епюра Q обмежується похилою прямою (див. правило 2), причому ця пряма перетинає базову лінію. А оскільки, згідно з правилом 3, Q переходить через нуль, змінюючи знак з $\langle\langle-\rangle\rangle$ на $\langle\langle+\rangle\rangle$, то $M_{ЕКСТР} = M_{\min}$.

Визначимо довжину відрізків, на які точка перерізу K , де $Q = 0$, поділяє ділянку розподіленого навантаження:

$$z_0 = \frac{Q_l}{q} = \frac{6}{4} = 1,5 \text{ м}; \quad b - z_0 \equiv Z_K = \frac{Q_{np}}{q} = \frac{2}{4} = 0,5 \text{ м}.$$

Визначимо згинальні моменти в характерних перерізі.

У перерізі 1 зосереджений момент M загинає балку вниз, тому

$$M_1 = -M = -6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На ділянці 1...2 немає ніяких зовнішніх зусиль крім моменту, тому

$$M_2 = M_1 = -M = -6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі 3 крім моменту з'являються також розподілене навантаження та сила, але вони діють на нескінченно малому відрізьку довжини, тому

$$M_3 = M_2 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На 4-й переріз крім моменту M діють сила P , яка загинає балку униз, та розподілене навантаження інтенсивністю q , яке загинає балку вверх, тому

$$M_4 = -M - P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1 = -6 - 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 2 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = M_4 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

На 6-й переріз діють момент M , сила P та розподілене навантаження інтенсивністю q , тому з урахуванням їх плечей маємо

$$M_6 = -M - P \cdot 5 + q \cdot 2 \cdot 4 = -6 - 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2 \cdot 4 = 16 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

За визначеними даними побудуємо (з урахуванням масштабів) епюру згинальних моментів (див. рис. 2.6, в). При цьому треба мати на увазі, що на ділянках 1...2 та 5...6 добуті точки треба з'єднувати прямими лініями, а на ділянці 3...4 епюра згинальних моментів повинна бути окреслена параболою, випуклість якої спрямована назустріч дії розподіленого навантаження, тобто униз. Як ми зазначали раніше, у перерізі K момент має найменше значення:

$$M_{EKCTP} = M_{\min} = -M - Pz_K + q \frac{z_K^2}{2} = -6 - 2 \cdot 0,5 + 4 \frac{0,5^2}{2} = -6,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Зробимо перевірку побудови епюр, рухаючи зліва направо:

На ділянці 6...5 зліва від перерізу 6 розташована реакція в затисненні $R_A = 6$ кН, яка направлена униз, тому на епюрі Q (див. рис. 2.6, б) має місто “стрибок” униз на величину

$$Q_6 = -R_A = -6 \text{ кН};$$

$$Q_5 = Q_4 = Q_6 = -6 \text{ кН}.$$

На ділянці 4...3 розподілене навантаження q прагне повернути відсічену частину балки (відносно перерізу 4) за ходом годинникової стрілки, тому поперечна сила буде зростати і у перерізі 3 досягне величини

$$Q_3 = -R_A + q \cdot 2 = -6 + 4 \cdot 2 = 2 \text{ кН}.$$

При переході з перерізу 3 до перерізу 2 буде стрибок униз на величину сили P і досягне нуля. Тому $Q_2 = Q_1 = 0$. Епюра Q побудована вірно.

Перевіряємо побудову епюри M . Зліва від перерізу 6 розташовано реактивний момент $M_A = 16$ кН·м, який загинає балку догори, тому на епюрі M (див. рис. 2.6, б) має місце “стрибок” уверх на величину $M_6 = 16$ кН·м.

У перерізах 5 і 4 момент має величину

$$M_5 = M_4 = M_A - R_A \cdot 3 = 16 - 6 \cdot 3 = -2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На ділянці 4...3 епюра згинальних моментів окреслена квадратичною параболою, а у перерізі K , де $Q = 0$ значення M має мінімальну величину, тому що Q переходить через нуль, змінюючи знак з $\langle\langle - \rangle\rangle$ на $\langle\langle + \rangle\rangle$.

У перерізах 3 і 2 момент має величину

$$M_3 = M_2 = M_A - R_A \cdot 5 + q \cdot 2 \cdot 1 = 16 - 6 \cdot 5 + 4 \cdot 2 \cdot 1 = -6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

У перерізі 1:

$$M_1 = M_A - R_A \cdot 6 + q \cdot 2 \cdot 2 - P \cdot 1 = 16 - 6 \cdot 6 + 4 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = -6 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

тобто дорівнює величині зовнішнього моменту $M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Таким чином, ми бачимо, що епюра M також побудована вірно.

Таку ж перевірку можна провести за допомогою рівняння (2.1) самостійно.

2.1.5 Приклад розв'язання задачі 2.2а (схема без екстремуму)

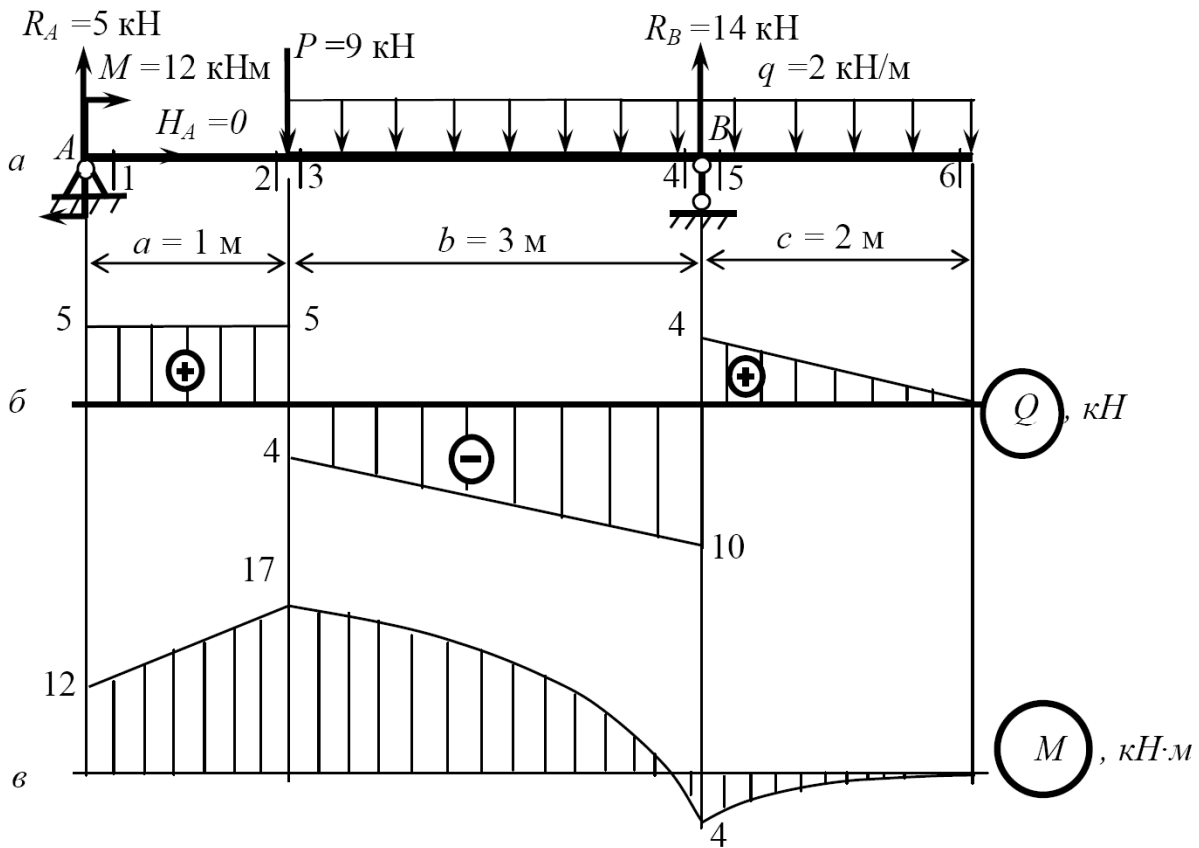
Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для двох-опорної балки (рис. 2.7, а).

Розв'язання. Перш за все, знайдемо опорні реакції, для чого складемо для балки рівняння рівноваги:

$$\sum P_{kz} = 0; \quad H_A = 0.$$

$$\sum M_A(\bar{P}_k) = 0; \quad -M - P \cdot a - q(b + c) \left(a + \frac{b + c}{2} \right) + R_B \cdot (a + b) = 0;$$

звідки
$$R_B = \frac{1}{1 + 3} \left(12 + 9 \cdot 1 + 2(3 + 2) \left(1 + \frac{3 + 2}{2} \right) \right) = 14 \text{ кН};$$



a – задана схема; *б* – епюра поперечних сил; *в* – епюра згинальних моментів

Рисунок 2.7 – Двохопорна балка до задачі 2.2, а

$$\sum M_B(\bar{P}_k) = 0: -M - R_A(a+b) + P \cdot b + q \frac{b^2}{2} - q \frac{c^2}{2} = 0;$$

звідки
$$R_A = \frac{1}{1+3} \left(-12 + 9 \cdot 3 + 2 \frac{3^2}{2} - 2 \frac{2^2}{2} \right) = 5 \text{ кН}.$$

Виконаємо перевірку:

$$\sum P_{ky} = R_A - P - q \cdot (b+c) + R_B = 5 - 9 - 2 \cdot (3+2) + 14 = 19 - 19 = 0.$$

Визначимо значення Q у характерних перерізах балки:

$$Q_1 = R_A = 5 \text{ кН}; \quad Q_2 = Q_1 = 5 \text{ кН}; \quad Q_3 = Q_2 - P = 5 - 9 = -4 \text{ кН};$$

$$Q_4 = Q_3 - q \cdot b = -4 - 2 \cdot 3 = -10 \text{ кН}; \quad Q_5 = Q_4 + R_B = -10 + 14 = 4 \text{ кН};$$

$$Q_6 = Q_5 - q \cdot c = 4 - 2 \cdot 2 = 0.$$

За цими даними побудуємо епюру поперечних сил (див. рис. 2.7, б), з'єднуючи знайдені ординати прямими лініями.

Зробимо перевірку побудови епюри Q , для чого будемо "рухатись" з правого боку на лівий.

На ділянці 6...5 розподілене навантаження приводить до зростання епюри Q від значення $Q_6 = 0$ до значення $Q_5 = q \cdot 2 = 4 \text{ кН}$.

Відносно перерізу 3 реакція $R_B = 14 \text{ кН}$ повертає балку проти ходу годинникової стрілки, тому епюра має "стрибок" униз на величину 14 кН.

Далі під впливом розподіленого навантаження, яке намагається повернути балку за ходом годинникової стрілки, поперечна сила зростає до величини

$$Q_3 = q \cdot 5 - R_B = 2 \cdot 5 - 14 = -4 \text{ кН}.$$

При переході від перерізу 3 до перерізу 2 має місце "стрибок" уверх на величину сили $P = 9 \text{ кН}$. Тому

$$Q_2 = Q_3 + P = -4 + 9 = 5 \text{ кН}.$$

На ділянці 2...1 змін не буде, тому

$$Q_2 = Q_1 = 5 \text{ кН}.$$

Таким чином, епюра Q побудована вірно.

Визначимо значення M в характерних перерізі балки:

$$M_1 = M = 12 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = M + R_A \cdot a = 12 + 5 \cdot 1 = 17 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = M_2 = 17 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = M + R_A \cdot (a+b) - P \cdot b - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} = 12 + 5 \cdot (1+3) - 9 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = M_4 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Останню частину епюри M побудуємо з правого кінця:

$$M_6 = 0; \quad M_5 = -q \frac{c^2}{2} = -2 \cdot 2 \cdot 1 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Оскільки значення моменту в перерізі 5 ліворуч і праворуч співпадають, то можна вважати, що епюра M побудована вірно. За визначеними даними побудуємо епюру згинальних моментів (див. рис. 2.7, в).

2.1.6 Приклад розв'язання задачі 2.2б (схема з екстремумом)

Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для двох-опорної балки (рис. 2.8, а).

Розв'язання. Визначимо опорні реакції балки (рис. 2.8, а).

Оскільки на балку діють тільки вертикальні сили, то горизонтальна реакція відсутня: $H_B = 0$.

$$\sum M_A(\bar{P}_k) = 0; \quad q \cdot 1 \cdot 0,5 - q \cdot 5 \cdot 2,5 + M - P \cdot 5 + R_B \cdot 6 = 0;$$

$$R_B = \frac{1}{6}(15 \cdot 5 - 21 + 8 \cdot 5 \cdot 2,5 - 8 \cdot 1 \cdot 0,5) = 25 \text{ кН};$$

$$\sum M_B(\bar{P}_k) = 0; \quad -R_A \cdot 6 + P \cdot 1 + M + q \cdot 6 \cdot 4 = 0.$$

$$R_A = \frac{1}{6}(15 \cdot 1 + 21 + 8 \cdot 6 \cdot 4) = 38 \text{ кН.}$$

Виконаємо перевірку:

$$\sum P_{ky} = R_A - P - q \cdot 6 + R_B = 63 - 63 = 0.$$

Визначимо значення Q в характерних перерізі балки (див. рис. 2.8, а):

$$Q_1 = 0; \quad Q_2 = -q \cdot 1 = -8 \cdot 1 = -8 \text{ кН};$$

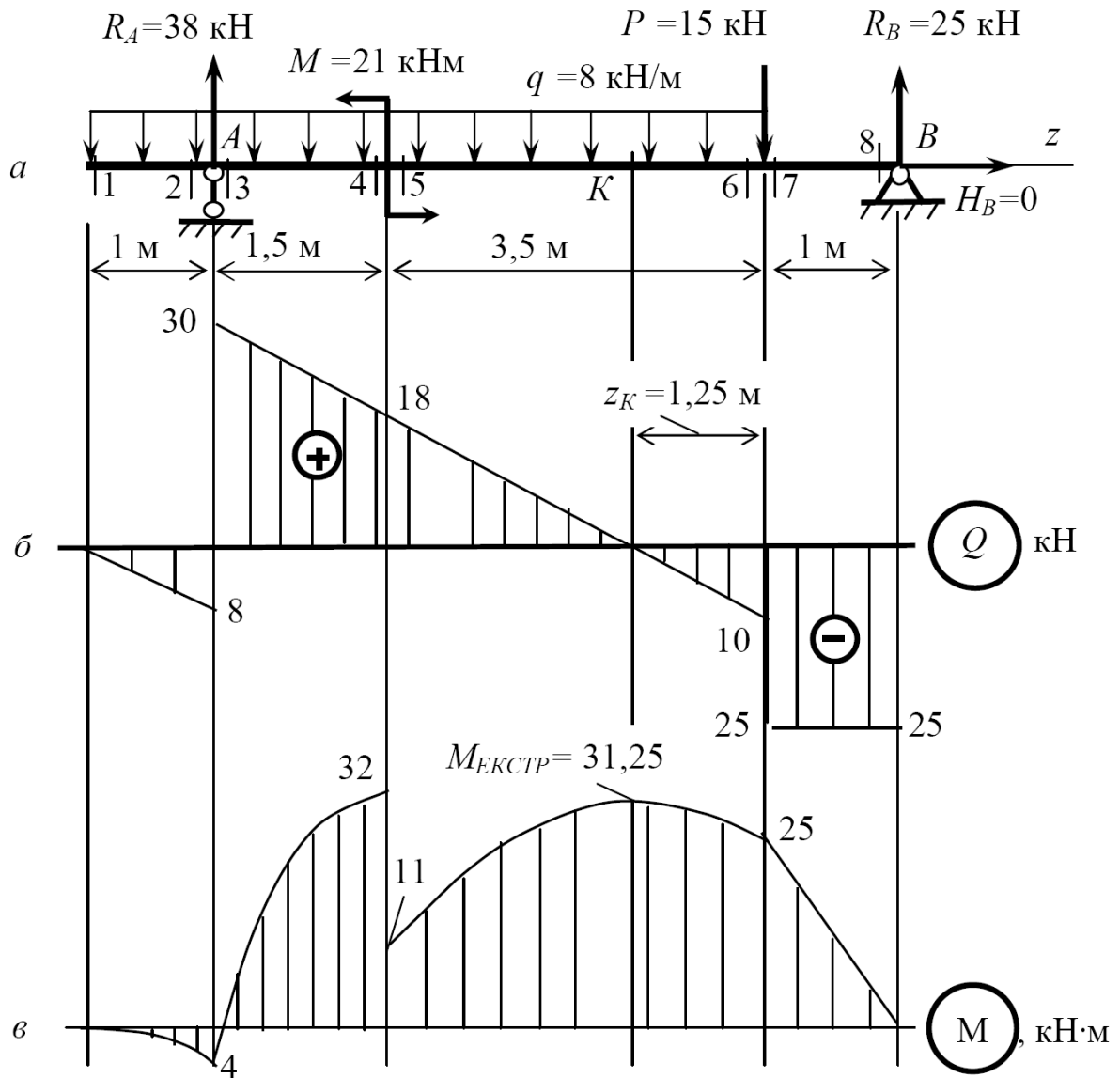
$$Q_3 = Q_2 + R_A = -8 + 38 = 30 \text{ кН};$$

$$Q_4 = Q_5 = R_A - q \cdot 2,5 = 38 - 8 \cdot 2,5 = 18 \text{ кН};$$

$$Q_6 = R_A - q \cdot 6 = 38 - 8 \cdot 6 = -10 \text{ кН};$$

$$Q_7 = Q_8 = Q_6 - P = -10 - 15 = -25 \text{ кН}.$$

За цими даними побудуємо епюру поперечних сил (див. рис. 2.8, б), з'єднуючи знайдені ординати прямими лініями.



a – задана схема; *б* – епюра поперечних сил;

в – епюра згинальних моментів

Рисунок 2.8 – Двохопорна балка до задачі 2.2, б

Оскільки ми будували епюру Q , “рухаючись” зліва направо, то напрямком “стрибків” на епюрі співпадає з напрямком сил.

На ділянці 1...2 розподілене навантаження приводить до поступового зниження значень поперечних сил Q від значення $Q_1=0$ до значення

$$Q_2 = -q \cdot 1 = -8 \text{ кН.}$$

У перерізі 3 реакція $R_A = 38 \text{ кН}$ забезпечує “стрибок” уверх до величини $Q_3 = 30 \text{ кН}$.

Далі під впливом розподіленого навантаження поперечна сила поступово зменшується до величини $Q_6 = -10 \text{ кН}$.

У перерізі 7 сила $P = 15 \text{ кН}$ забезпечує “стрибок” униз до величини $Q_7 = -25 \text{ кН}$ і далі поперечна сила не змінюється $Q_8 = Q_7 = -25 \text{ кН}$.

Зробимо перевірку побудови епюри Q , для чого будемо “рухатись” справа наліво.

У перерізі 8 реакція $R_B = 25 \text{ кН}$ намагається повернути балку проти ход годинникової стрілки, тому на епюрі Q ми маємо “стрибок” униз до $Q_8 = -25 \text{ кН}$ і далі без змін до перерізу 7.

У перерізі 6 з’являється сила $P = 15 \text{ кН}$, яка намагається повернути балку за ходом годинникової стрілки, тому на епюрі Q ми маємо “стрибок” уверх до значення $Q_6 = -10 \text{ кН}$.

На ділянці 6...3 розподілене навантаження приводить до зростання значень поперечних сил Q від значення $Q_6 = -10 \text{ кН}$ до значення $Q_3 = Q_6 + q \cdot 5 = 30 \text{ кН}$. При цьому наявність згинального моменту M на епюрі Q не позначається.

Відносно перерізу 2 реакція $R_A = 38 \text{ кН}$ повертає балку проти ходу годинникової стрілки, тому епюра має “стрибок” униз до величини $Q_2 = -8 \text{ кН}$.

Далі під впливом розподіленого навантаження, яке намагається повернути балку за ходом годинникової стрілки, поперечна сила зростає до величини $Q_1 = Q_2 + q \cdot 1 = 0$.

Таким чином, епюра Q побудована вірно.

Визначимо значення M в характерних перерізі балки:

$$M_1 = 0; \quad M_2 = -q \cdot 1 \cdot 0,5 = -8 \cdot 1 \cdot 0,5 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = M_2 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = R_A \cdot 1,5 - q \cdot 2,5 \cdot 1,25 = 38 \cdot 1,5 - 8 \cdot 2,5 \cdot 1,25 = 32 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = M_4 - M = 32 - 21 = 11 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6 = R_A \cdot 5 - q \cdot 6 \cdot 3 - M = 38 \cdot 5 - 8 \cdot 6 \cdot 3 - 21 = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На ділянці 5...6 у перерізі K , де $Q = 0$, на епюрі M має бути максимум. Підрахуємо значення z_K і $M_K = M_{\max}$:

$$z_K = \frac{Q_6}{q} = \frac{10}{8} = 1,25 \text{ м};$$

$$\begin{aligned} M_K = M_{\max} &= R_B(1 + z_K) - P \cdot z_K - q \cdot \frac{z_K^2}{2} = \\ &= 25 \cdot 2,25 - 15 \cdot 1,25 - 8 \cdot 1,25 \cdot 0,625 = 31,25 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Останню частину епюри M побудуємо з правого кінця:

$$M_8 = 0; \quad M_7 = R_B \cdot 1 = 25 \cdot 1 = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Оскільки $M_6 = M_7$, то епюра M побудована вірно.

За цими даними будуємо епюру згинальних моментів (див. рис. 2.8, в).

2.2 Консольна рама (задача 2.3) та двохопорна рама (задача 2.4)

Для заданої рами побудувати епюри поздовжніх, поперечних сил та згинальних моментів.

Вихідні дані вибрати із таблиць 2.1 та 2.2 і рисунків 2.9 та 2.10.

2.2.1 Методичні вказівки до виконання задач 2.3 та 2.4

Рамами називають системи, які складаються з прямолінійних стрижнів, з'єднаних жорсткими вузлами. Вертикально розміщені стрижні рам називають *стояками*, горизонтальні – *ригелями*. Жорсткість вузлів виключає взаємний поворот скріплених стрижнів, тобто у вузлових точках кути між осями з'єднаних стрижнів залишаються незмінними.

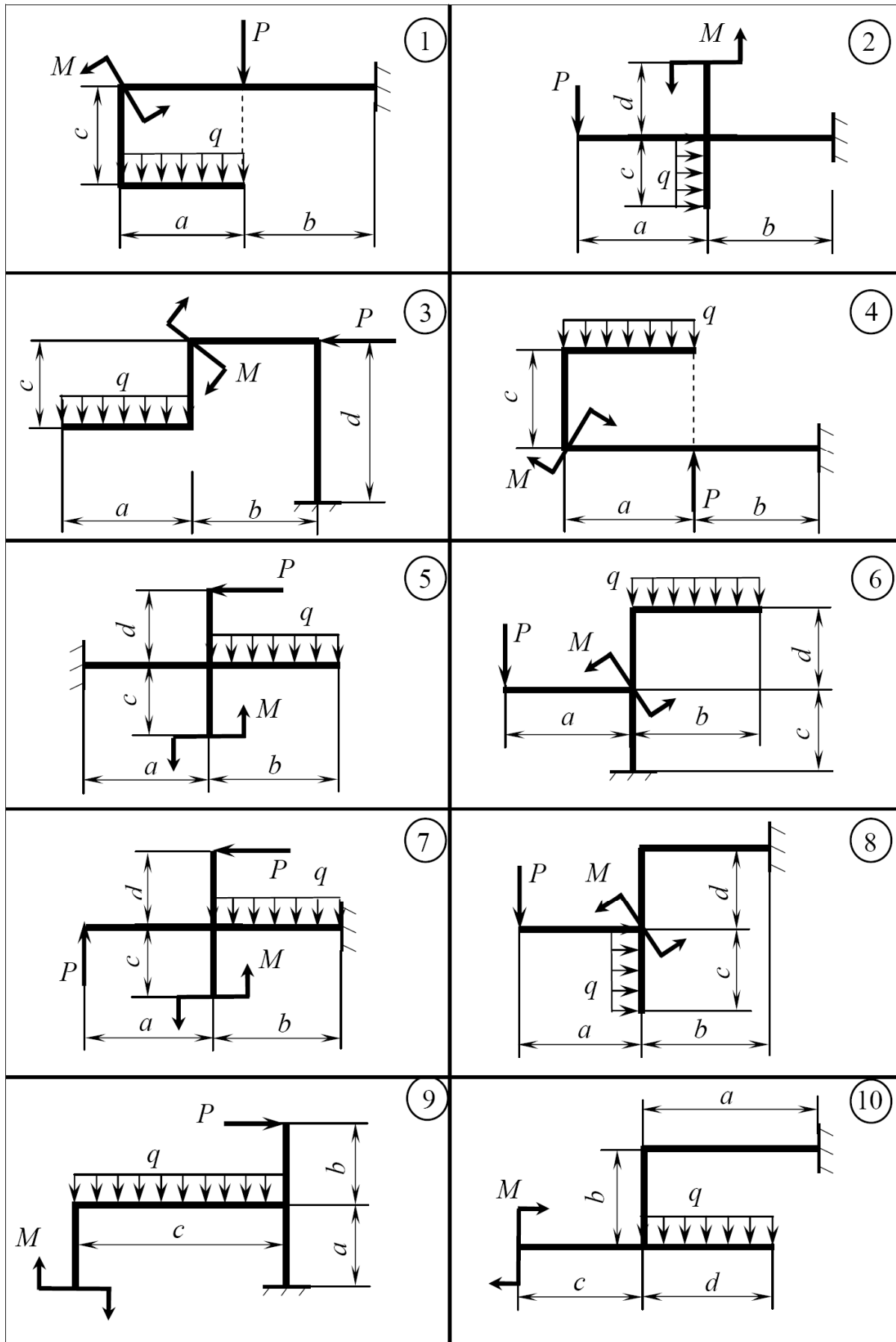


Рисунок 2.9

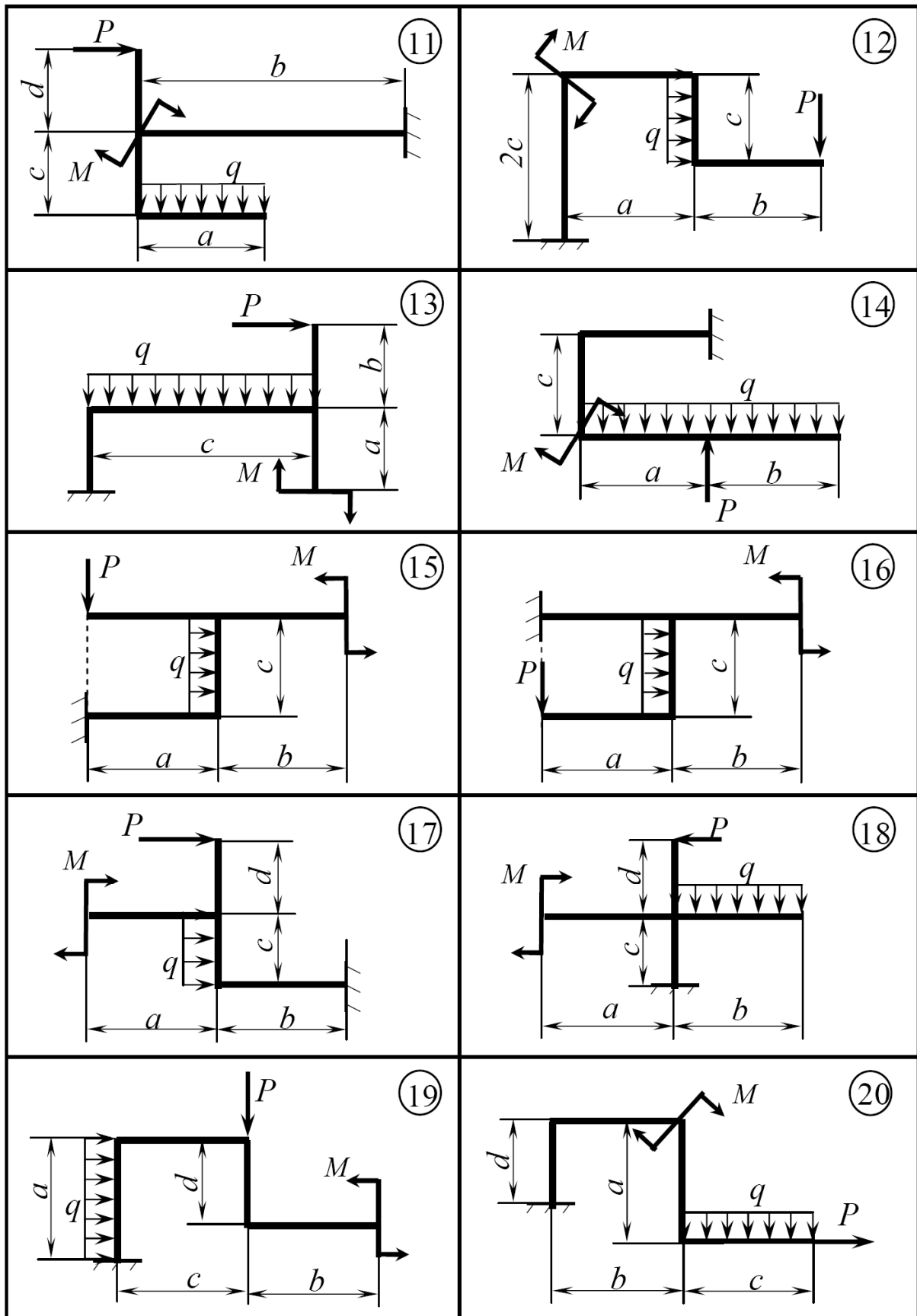


Рисунок 2.9, аркуш 2

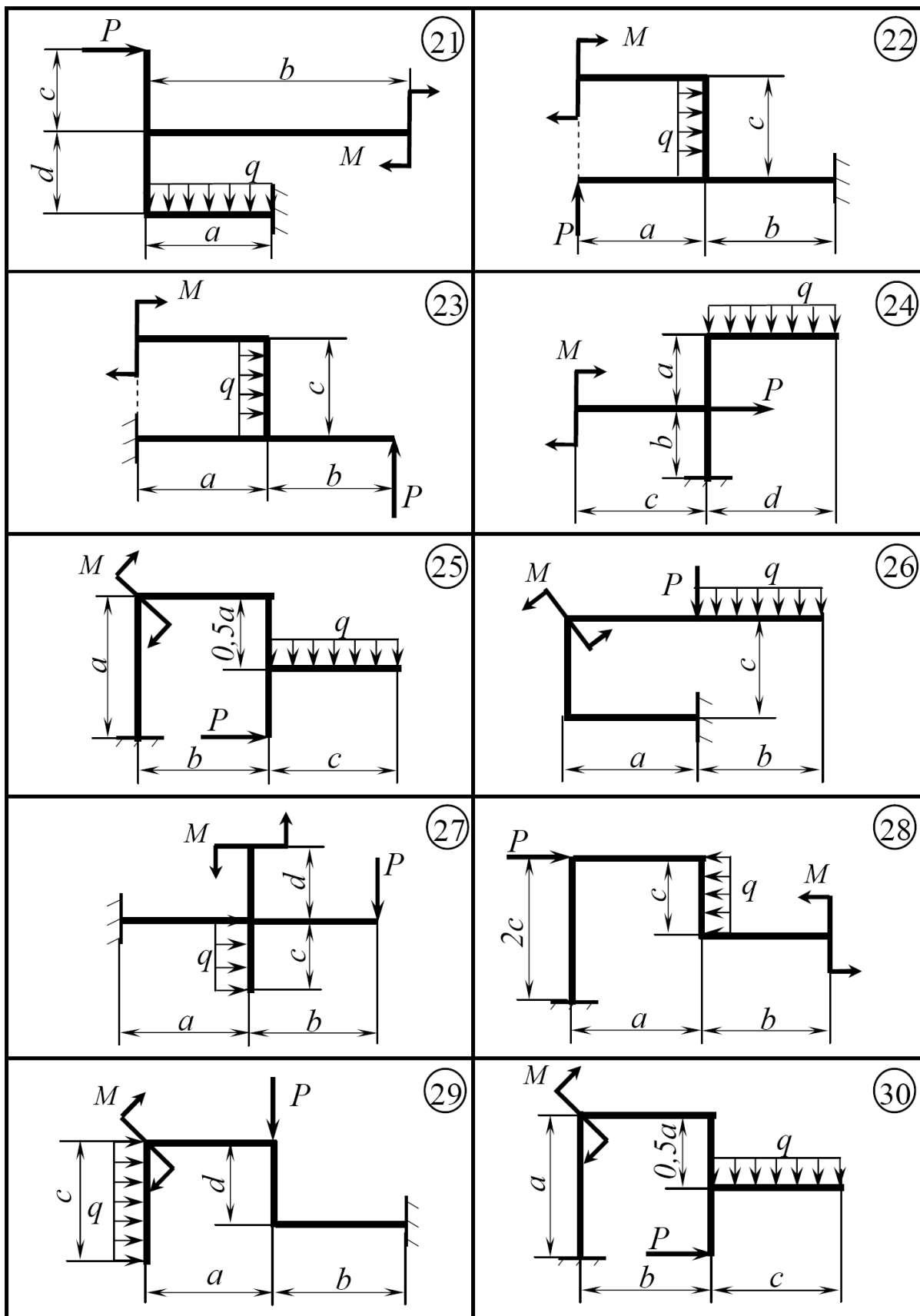


Рисунок 2.9, аркуш 3

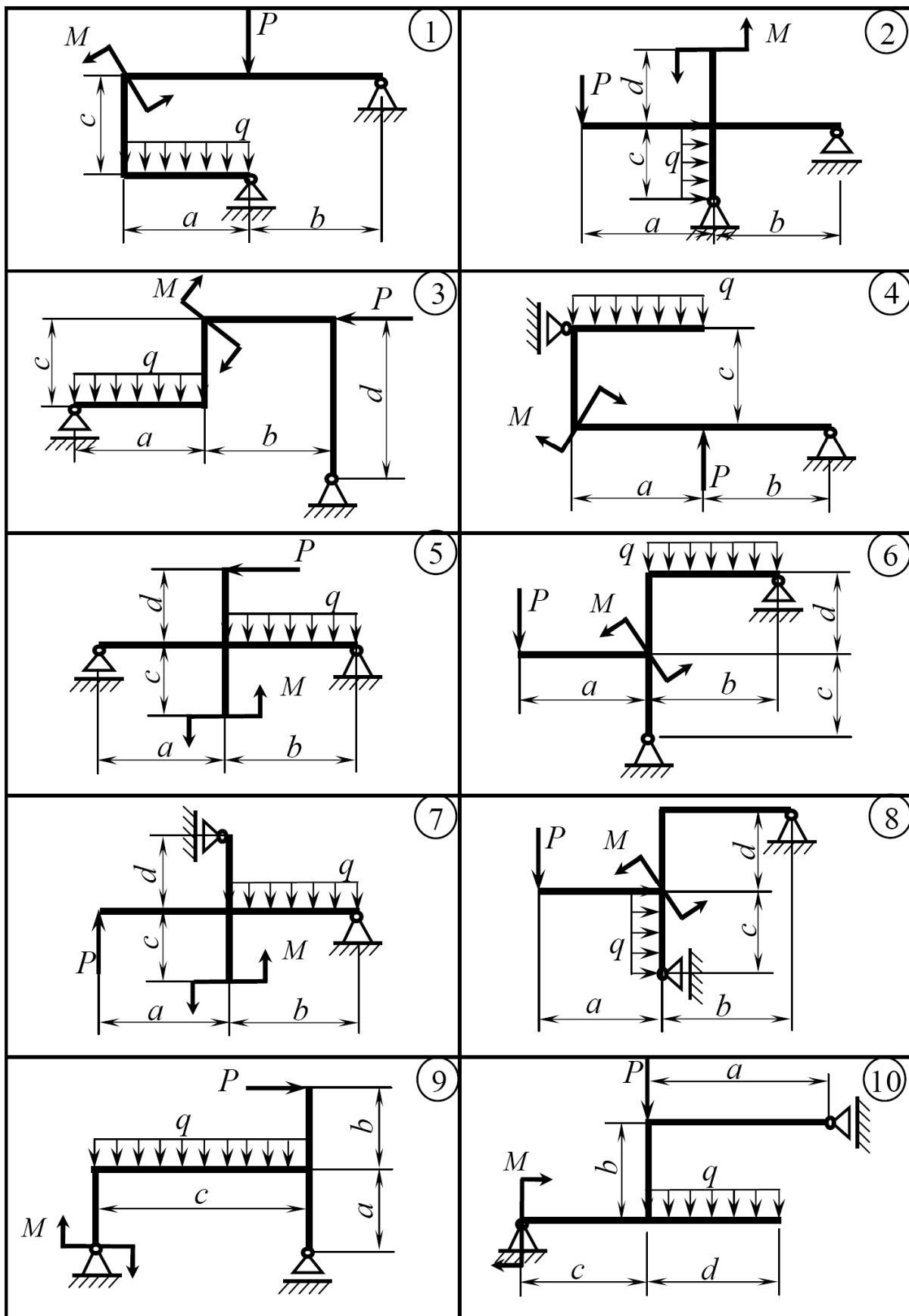


Рисунок 2.10

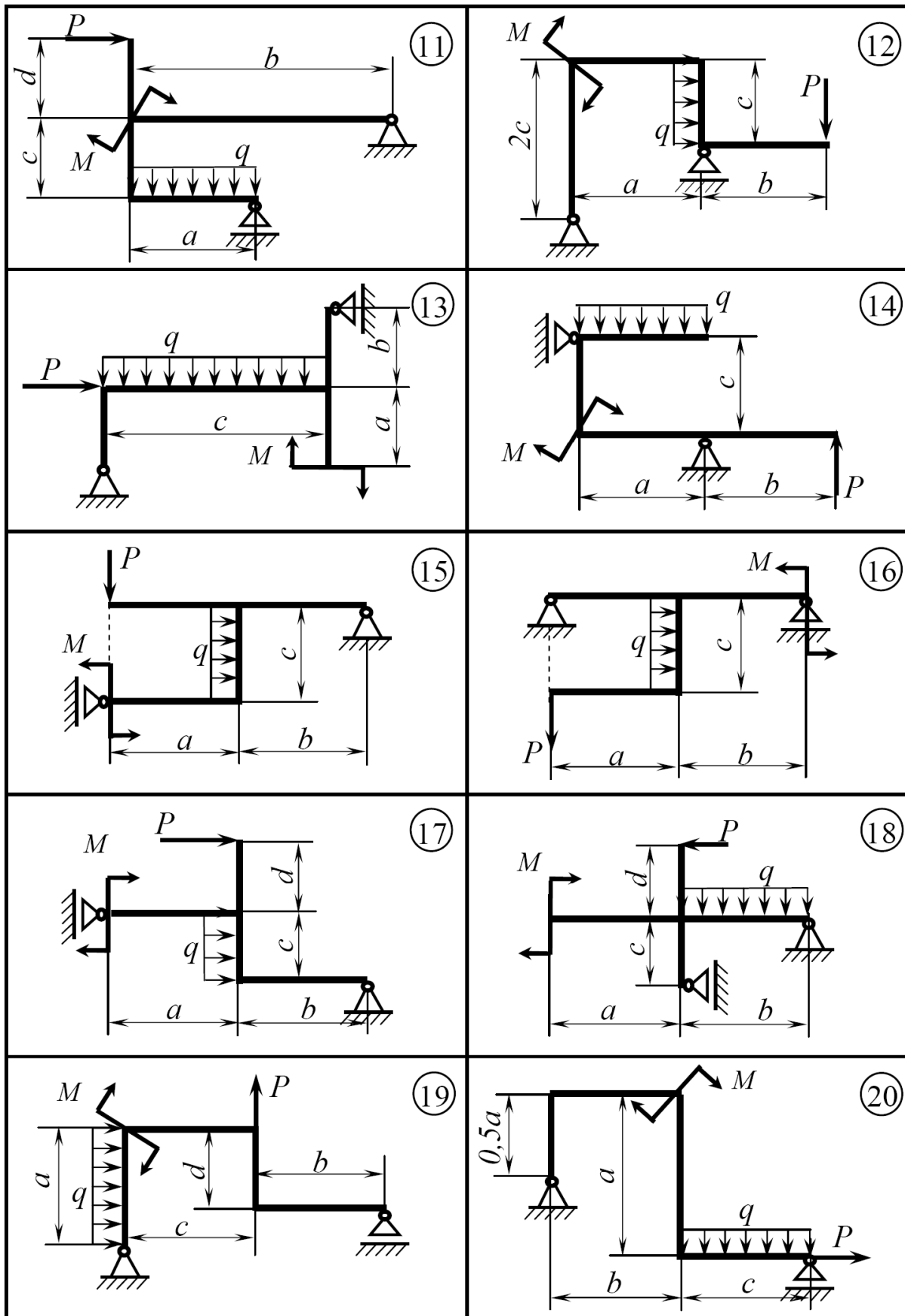


Рисунок 2.10, аркуш 2

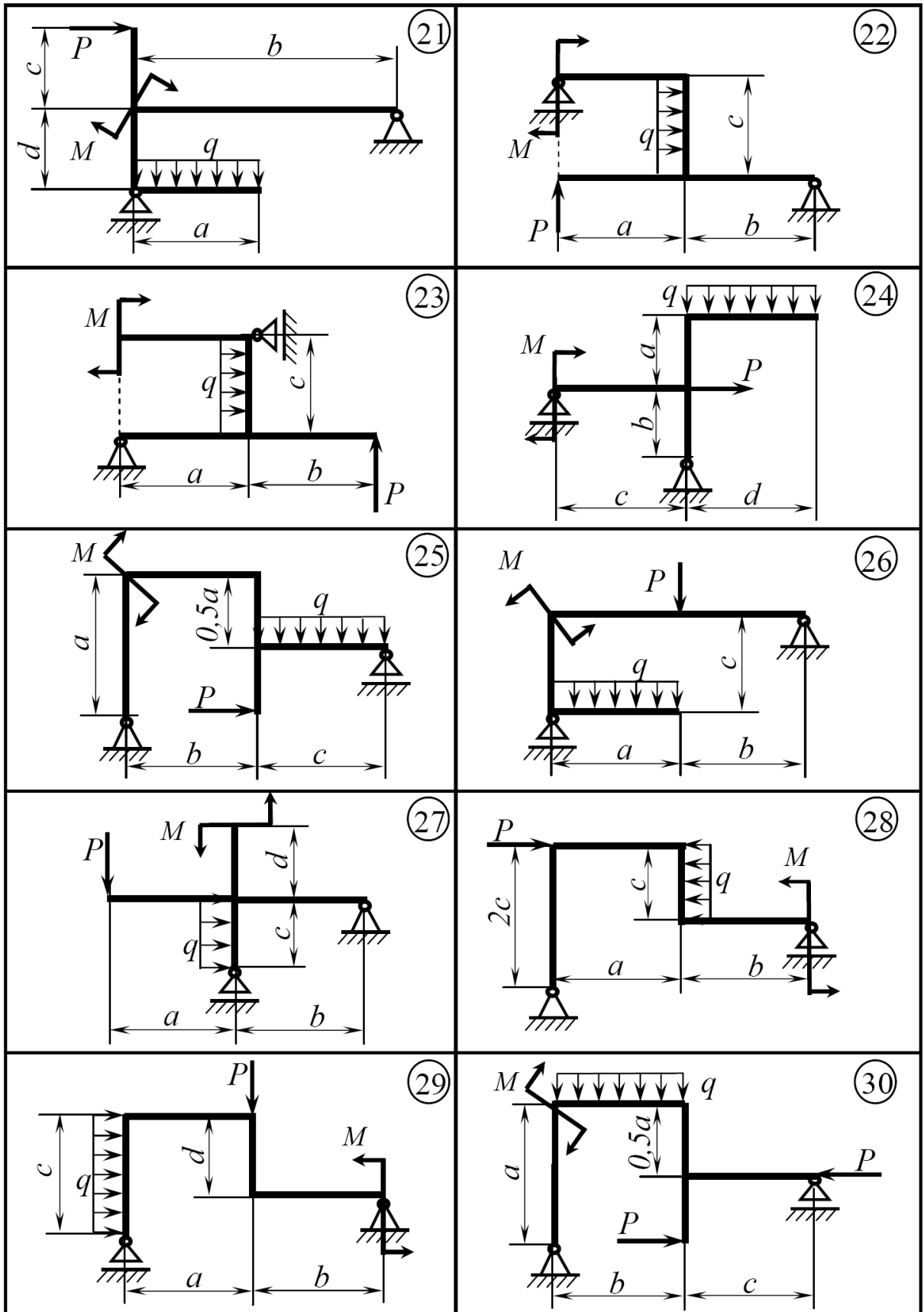


Рисунок 2.10, аркуш 3

Вісь рами є ломаною лінією, а кожний прямолінійний елемент рами можна розглянути як балку. Тому, щоб побудувати яку-небудь епюру для рами, треба побудувати її для кожної окремої балки, що входить до складу рами.

На відміну від звичайних балок у перерізі стрижнів рами, крім згинальних моментів M і поперечних сил Q , як правило, виникають ще поздовжні зусилля N . Отже для рам доводиться будувати епюри N , Q та M , значення яких можна знайти за наступними правилами.

Поздовжня сила N дорівнює сумі проекцій на вісь стрижня усіх зовнішніх сил, які розташовані з одного боку від перерізу.

Поперечна сила Q дорівнює сумі проекцій на перпендикуляр до осі усіх зовнішніх сил, які розташовані з одного боку від перерізу.

Згинальний момент M дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил з одного боку від перерізу, який розглядаємо, відносно центра ваги цього перерізу.

Будемо використовувати такі *правила знаків* для N , Q й M , які є однаковими для балок та рам.

Поздовжня сила N вважається додатною, якщо вона викликає розтягання стрижня.

Поперечна сила Q в перерізі вважається додатною, якщо зовнішня сила намагається повернути переріз, який розглядаємо, за напрямком руху годинникової стрілки.

При побудові епюр на балках прийняте таке правило знаків щодо згинального моменту: “згинальний момент M у перерізі вважається додатним, якщо він викликає стиск верхніх волокон балки”.

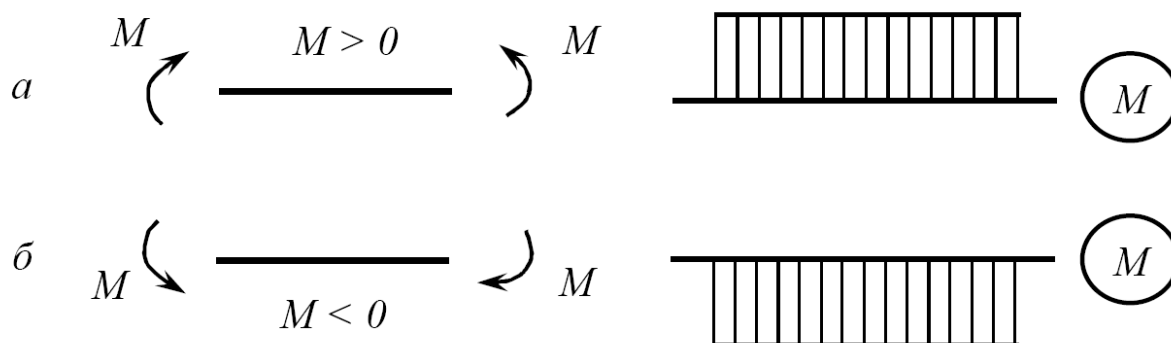


Рисунок 2.11

За цим правилом епюра згинальних моментів будується на верхніх волокнах, якщо згинальний момент додатний (рис. 2.11, а), або на нижніх – якщо згинальний момент від’ємний (рис. 2.11, б).

Таким чином, загальне правило побудови епюри згинальних моментів M для балок та рам буде виглядати так: *епюру згинальних моментів будують на стиснутих волокнах*. Це правило може бути записано інакше: *епюра згинальних моментів будується у тому напрямку, куди зовнішні сили чи момент загинають ділянку стрижня, яку розглядаємо*.

Вирази для $M(z)$, $Q(z)$ записують дуже рідко – здебільшого для тих ділянок, де діють розподілені навантаження. Найчастіше просто обчислюють значення N , Q та M у характерних перерізах (на межах ділянок та в екстремальних точках), а потім проводять лінії епюр, зважаючи на їхні властивості, про які йшлося в методичних вказівках для виконання задач 1 та 2.

Ординати епюр, як і завжди, будемо відкладати *перпендикулярно* до осей стрижнів рами, що утворюють базу, контур якої збігається з контуром рами. Якщо рама має жорстке закріплення, то епюри N , Q та M можна будувати, не визначаючи реакції опор і “йдучи” з вільного кінця рами.

2.2.2 Приклад розв’язання задачі 2.3

Для заданої рами (рис. 2.12, а) побудувати епюри поздовжніх сил N , поперечних сил Q та згинальних моментів M .

Розв’язання. Будемо будувати епюри, “рухаючись” з вільного кінця рами. Означимо на балці характерні перерізи (див. рис. 2.12, а) за правилами, записаними вище.

Визначимо поздовжні сили N у характерних перерізах.

Ділянка 1...2 розташована горизонтально, тому поздовжні сили повинні діяти також горизонтально. Таких сил у перерізі 1 та 2 немає, отже,

$$N_1 = N_2 = 0.$$

Ділянка 3...4 розташована вертикально, тому сила розподіленого навантаження q проектується на вісь цієї ділянки і викликає поздовжню силу, яка розтягає ділянку

$$N_3 = N_4 = q \cdot a = 4 \cdot 2 = 8 \text{ кН.}$$

На перерізи 5 та 6 діє сила $P = 2 \text{ кН}$, яка розміщена горизонтально і стискає ділянку 5...6, тому

$$N_5 = N_6 = -P = -8 \text{ кН.}$$

Ділянка 7...8 також розташована вертикально і на неї, стискуючи, діє сила розподіленого навантаження

$$N_7 = N_8 = -q \cdot a = -4 \cdot 2 = -8 \text{ кН.}$$

Побудуємо епюру поздовжніх сил N , для чого відкладемо результати розрахунків у вигляді окремих ординат (з урахуванням масштабів) від базової осі епюри, яка має контур рами (рис. 2.12, б). З'єднаємо знайдені точки прямими лініями, враховуючи правила, наведені вище.

Визначимо поперечні сили Q в характерних перерізі.

У перерізі 1 поперечною силою є розподілене навантаження, яке діє на нескінченно малому відрізьку, тому

$$Q_1 = q \cdot 0 = 0.$$

У перерізі 2 розподілене навантаження намагається повернути ділянку 1...2 проти ходу годинникової стрілки і поперечна сила досягає величини

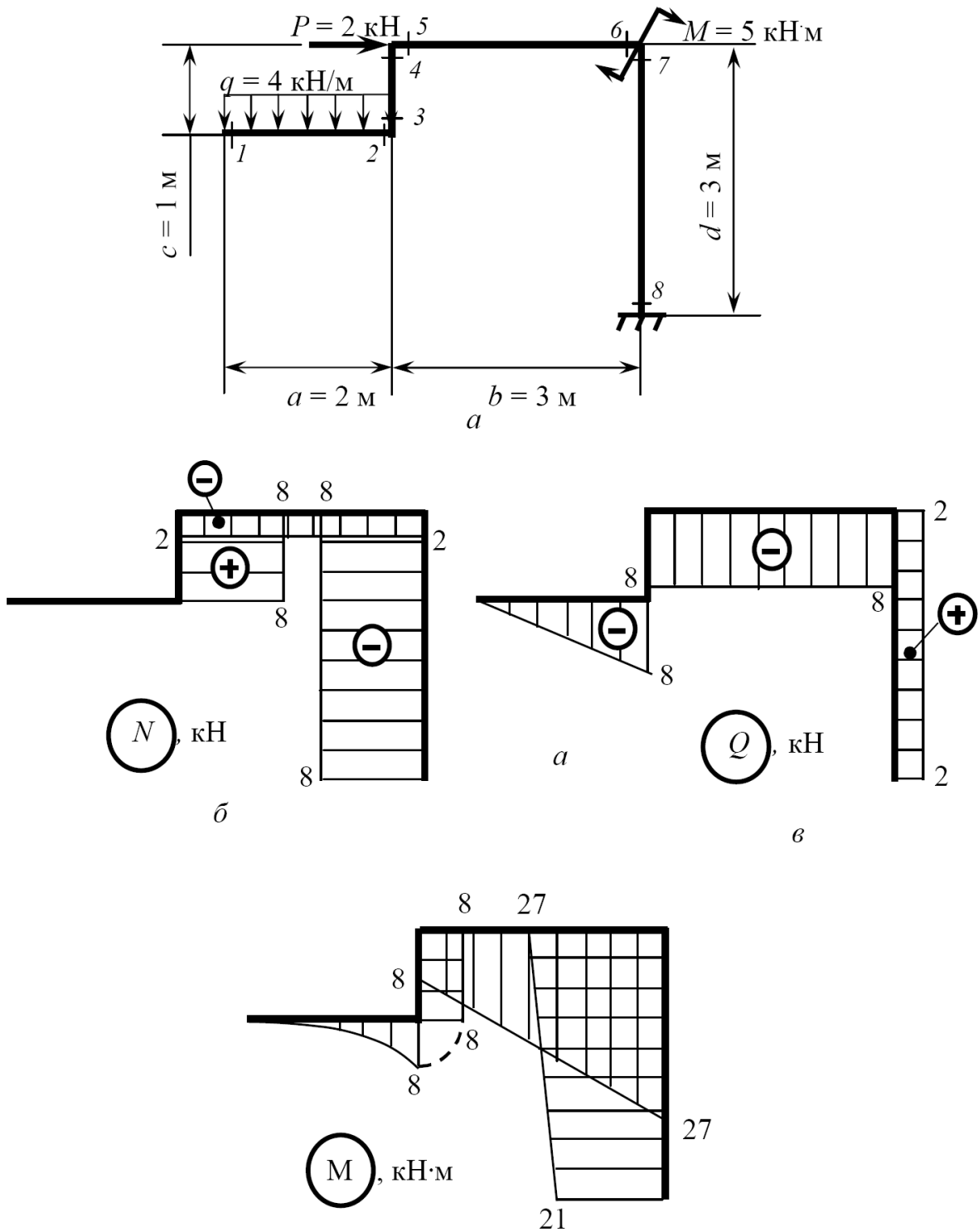
$$Q_2 = -qa = -4 \cdot 2 = -8 \text{ кН.}$$

На ділянці 3...4, яка розташована вертикально, немає жодної сили, яка б проектувалась на перпендикуляр до осі цієї ділянки стрижня, тому

$$Q_3 = Q_4 = 0.$$

У перерізах 5 та 6 поперечною є сила розподіленого навантаження, яка намагається повернути ділянку 5...6 проти ходу годинникової стрілки:

$$Q_5 = Q_6 = Q_2 = -qa = -8 \text{ кН.}$$



a – задана схема, б – епюра поздовжніх сил, в – епюра поперечних сил, г – епюра згинальних моментів

Рисунок 2.12 – Консольна рама до задачі 2.3

У перерізах 7 та 8 поперечною є сила $P = 2$ кН, яка намагається повернути ділянку 7...8 за ходом годинникової стрілки, тому

$$Q_7 = Q_8 = P = 2 \text{ кН.}$$

Побудуємо епюру поперечних сил Q , для чого відкладемо результати розрахунків у вигляді окремих ординат (з урахуванням масштабів) від базової рами (рис. 2.12, в). З'єднаємо добуті точки прямими лініями, враховуючи наведені вище правила. На ділянці 1...2, де діє розподільне навантаження інтенсивністю q , епюра Q обмежується похилою прямою (див. правило 2).

На ділянках 5...6 та 7...8 розподільного навантаження немає, тому (див. правило 1) епюра Q окреслюється прямими, паралельними базі.

Визначимо згинальні моменти M у характерних перерізах.

У перерізі 1 згинальний момент M дорівнює нулю, оскільки розподілене навантаження діє на нескінченно малому відрізку

$$M_1 = 0.$$

На 2-й переріз діє розподілене навантаження інтенсивністю q , яке загинає балку вниз, тому момент, як і в балках, позначимо знаком “мінус”:

$$M_2 = -q \cdot 2 \cdot 1 = -4 \cdot 2 \cdot 1 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

У перерізі 3 діє той же момент, що і у перерізі 2, але він загинає ділянку 3...4 вправо, тому з умови рівноваги нижнього жорсткого вузла момент M_2 стискає нижні волокна ригеля, а рівний йому за модулем момент M_3 стискає праві волокна стійки:

$$M_3 = |M_2| = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

На ділянці 3 ... 4 немає ніяких зовнішніх зусиль, тому

$$M_4 = M_3 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

У перерізі 5 діє той же момент, що і у перерізі 2, 3 та 4, який також загинає балку униз, тому з умови рівноваги верхнього жорсткого вузла зліва: момент M_4 стискає праві волокна стійки, а рівний йому за модулем момент M_5 стискає нижні волокна верхнього ригеля

$$M_5 = M_4 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі 6 згинальний момент дорівнює:

$$M_6 = -q \cdot 2 \cdot 4 = -4 \cdot 2 \cdot 4 = -32 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі 7 крім згинального моменту M_6 , який загинає вертикальну ділянку вліво, з'являються також зовнішній зосереджений момент M , але він діє в протилежному напрямку, тому з умови рівноваги верхнього жорсткого вузла праворуч момент M_7 стискає ліві волокна стійки, що закріплюється в жорсткому защемленні

$$M_7 = M_6 + M = -32 + 5 = -27 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На 8-й переріз діють момент M , сила P та розподілене навантаження інтенсивністю q , тому з урахуванням їх плечей маємо:

$$M = -q \cdot 2 \cdot 4 + M + P \cdot 3 = -4 \cdot 2 \cdot 4 + 5 + 2 \cdot 3 = -21 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

За визначеними даними побудуємо (з урахуванням масштабів) епюру згинальних моментів (рис. 2.12, г). При цьому треба мати на увазі, що на ділянці 1...2 епюра згинальних моментів повинна бути окреслена параболою, випуклість якої спрямована назустріч дії розподіленого навантаження, тобто уверх. А на всіх інших ділянках добуті ординати треба з'єднувати прямими лініями.

Епюри згинальних моментів на всіх ділянках будемо будувати на стиснутих волокнах, або у тому напрямку, куди сили та момент загинають стрижні. Так на ділянках 1...2 та 5...6 стрижні загинаються униз, на ділянці 3...4 розподілене навантаження загинає вертикальний стрижень праворуч, а на ділянці 7...8 сумісна дія зовнішніх факторів (q , P , M) загинає вертикальний стрижень ліворуч (див. рис. 2.12, г).

2.2.3 Приклад розв'язання задачі 2.4

Для заданої рами (рис. 2.13, а) побудувати епюри поздовжніх сил N , поперечних сил Q та згинальних моментів M .

Розв'язання. Задана рама опирається на три шарнірно-рухомі опори, кожна з котрих має по одній реакції.

Знайдемо опорні реакції, для чого складемо для балки рівняння рівноваги. При складанні рівнянь зручно, щоб у кожному рівнянні було лише по одній невідомій реакції. Для цього використаємо точки перетинань ліній дій реакцій (див. рис. 2.13, а):

$$\sum M_D(\bar{P}_k) = 0; \quad -q \cdot 3,5 \cdot 1,75 - M + P \cdot 1 + R_C \cdot 4,5 = 0;$$

$$R_C = \frac{3 \cdot 3,5 \cdot 1,75 + 6,5 - 4 \cdot 1}{4,5} = 4,64 \text{ кН};$$

$$\sum M_E(\bar{P}_k) = 0; \quad q \cdot 3,5 \cdot 2,75 - M + P \cdot 1 - R_A \cdot 4,5 = 0;$$

$$R_A = \frac{3 \cdot 3,5 \cdot 2,75 - 6,5 + 4 \cdot 1}{4,5} = 5,86 \text{ кН};$$

$$\sum P_{kz} = 0; \quad R_B - P = 0; \quad R_B = P = 4 \text{ кН}.$$

Зробимо перевірку:

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R_A - q \cdot 3,5 + R_C = 0;$$

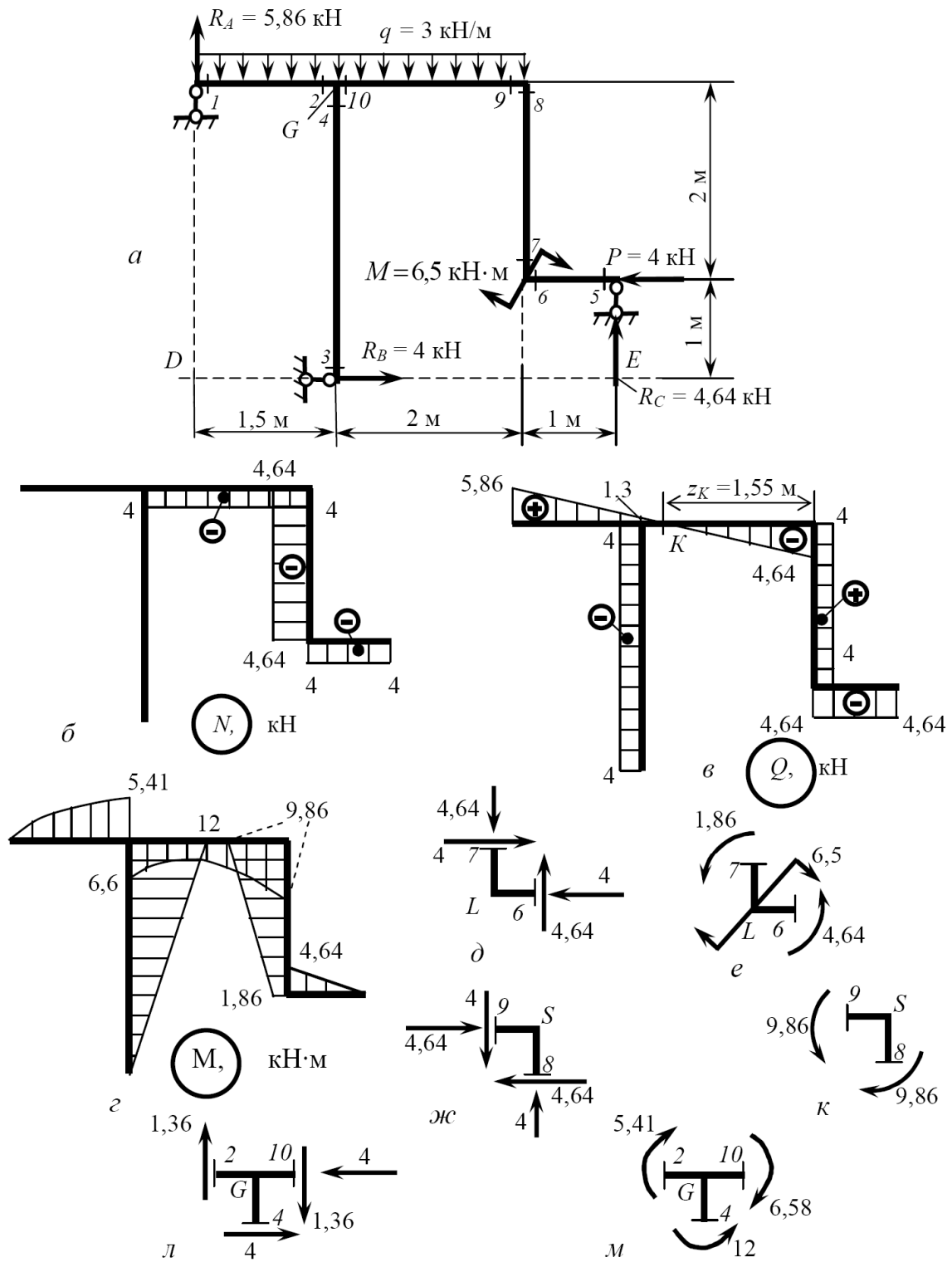
$$5,86 - 3 \cdot 3,5 + 4,64 = 10,5 - 10,5 = 0.$$

Таким чином, реакції знайдені вірно.

Після звільнення від зв'язків опор рама має три «вільних» кінця. Тому побудову епюр необхідно проводити на кожному з них, рухаючись від «вільного» кінця до вузла G , а потім перевірити рівновагу всіх жорстких вузлів. Відповідно з цим означимо на балці характерні перерізи (див. рис. 2.13,а).

Визначимо поздовжні сили N в характерних перерізах.

Ділянка 1...2 розташована горизонтально, тому поздовжні сили повинні діяти також горизонтально. Зовнішні сили: реакція R_A та рівнодіюча R розподіленого навантаження на цій ділянці мають нульові проекції на вісь z стрижня, тому поздовжніх сил в перерізах 1, 2 немає, отже:



a – задана схема, *б* – епюра поздовжніх сил, *в* – епюра поперечних сил, *г* – епюра згинальних моментів, *д, е* – схеми умов рівноваги вузла *L* під впливом сил та моментів відповідно, *ж, к* – схеми умов рівноваги вузла *S* під впливом сил та моментів відповідно, *л, м* – схеми умов рівноваги вузла *G* під впливом сил та моментів відповідно

Рисунок 2.13 – Трьохпорна рама

$$N_1 = N_2 = 0.$$

Ділянка 3...4 розташована вертикально, тому поздовжні сили повинні діяти також вертикально, але їх немає:

$$N_3 = N_4 = 0.$$

Таким чином ми проаналізували ділянки рами рухаючи з двох «вільних» кінців. Для перерізів 5-10 будемо рухатись з третього «вільного» кінця. На ділянку 5...6 діють два силових фактора: $P = 4$ кН та $R_C = 4,64$ кН, з них тільки сила P має ненульову проекцію на вісь z стрижня цієї ділянки, яку ця сила стискає.

Тому

$$N_5 = N_6 = -P = -4 \text{ кН.}$$

На вертикальну ділянку 7...8 діють вже три силових фактора M , R_C та P , але тільки R_C спроможна відтворити поздовжно силу в цій ділянці, яку вона теж стискає:

$$N_7 = N_8 = -R_C = -4,64 \text{ кН.}$$

Ділянка 9...10 має горизонтальну вісь стрижня z і на неї діють вже чотири фактора: P , M , R_C та розподілене навантаження q на довжині 2 м, з яких тільки сила P має ненульову проекцію на вісь z стрижня цієї ділянки і стискає його:

$$N_9 = N_{10} = -P = -4 \text{ кН.}$$

Побудуємо епюру поздовжніх сил N , для чого відкладемо результати розрахунків у вигляді окремих ординат (з урахуванням масштабів) від базової рами (рис. 2.13, б). З'єднаємо добуті точки прямими лініями, враховуючи наведені вище правила.

Визначимо поперечні сили Q в характерних перерізах.

Для переріза 1 залишкова частина стрижня має безкінечно малу довжину ($Dz \rightarrow 0$), тому на неї діють реакція $R_A = 5,56$ кН та рівнодіюча $q \cdot Dz$.

Реакція R_A намагається повернути залишкову частину за ходом годинникової стрілки, а рівнодіюча – проти, тому:

$$Q_1 = R_A - q \cdot \Delta z = 5,86 \text{ кН.}$$

У перерізі 2 завдяки розподіленому навантаженню поперечна сила зменшується до величини

$$Q_2 = R_A - q \cdot 1,5 = 5,86 - 3 \cdot 1,5 = 1,36 \text{ кН.}$$

Якщо рухатись з іншого «вільного» кінця, то на ділянці 3...4 вісь u стрижня є горизонтальною прямою; тому реакція R_B може викликати відповідну поперечну силу, яка згідно з правилами є від'ємною:

$$Q_3 = Q_4 = -R_B = -4 \text{ кН.}$$

Якщо рухатись з третього «вільного кінця», то стрижень ділянки 5...6 має вертикальну вісь u , тому з двох зовнішніх сил P , R_C тільки R_C викликає від'ємну поперечну силу

$$Q_5 = Q_6 = -R_C = -4,64 \text{ кН.}$$

На ділянці 7...8 вісь u стрижня **стійки** горизонтальна, тому вже сила P відтворює у перерізах 7 та 8 додатну поперечну силу:

$$Q_7 = Q_8 = P = 4 \text{ кН.}$$

На останній до вузла G ділянці 9...10 вісь u стрижня вертикальна, на ділянку діють чотири зовнішніх фактора R_C , P , M та розподілене навантаження на довжині 2 м. Проекцію на вісь u мають R_C та рівнодіюча розподіленого навантаження. У перерізі 9, реакція R_C викликає від'ємну поперечну силу, а рівнодіюча на довжині $q \cdot \Delta z$ – додатну. Тому

$$Q_9 = -R_C + q \cdot \Delta z = -4,64 \text{ кН.}$$

У перерізі 10 замість Δz треба записати 2 м, тому

$$Q_{10} = -R_C + q \cdot 2 = -4,64 + 3 \cdot 2 = 1,36 \text{ кН.}$$

Побудуємо епюру поперечних сил Q (рис. 2.13, в), для чого відкладемо знайдені результати у вигляді окремих ординат (з урахуванням масштабів) від базової лінії кожної ділянки рами. З'єднаємо добуті точки прямими лініями, враховуючи наведені вище правила. На ділянках 1...2 та 9...10, де діє розподілене навантаження інтенсивністю q , епюра Q обмежується похилою прямою (див. правило 2). На інших ділянках розподіленого навантаження немає, тому (див. правило 1) епюра Q окреслюється прямими, паралельними базі.

Визначимо згинальні моменти M в характерних перерізах.

У перерізі 1 згинальний момент M дорівнює нулю, оскільки реакція R_A та розподілене навантаження діють на нескінченно малому відрізку:

$$M_1 = R_A \cdot Dz - q \cdot Dz \cdot \frac{Dz}{2} = 0.$$

На цій ділянці R_A стискає верхні волокна, тому відповідний згинальний момент згідно з правилами є додатним, рівнодіюча $q \cdot Dz$ навпаки стискає нижні, тому створює від'ємний згинальний момент. Ці моменти – нескінченно малі першого та другого порядку, тому ними нехтують.

У перерізі 2, на залишкову частину діють також реакція R_A та рівнодіюча розподіленого навантаження $q \cdot 1,5$, тому

$$M_2 = R_A \cdot 1,5 - q \cdot 1,5 \cdot \frac{1,5}{2} = 5,86 \cdot 1,5 - 3 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = 5,41 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Рухаючись з іншого «вільного» кінця, у перерізі 3 згинальний момент M дорівнює нулю, оскільки плече реакції R_B є довжиною нескінченно малого відрізка

$$M_3 = R_B \cdot Dz = 0.$$

У перерізі 4 таке плече реакції R_B вже 3 м, тому

$$M_4 = R_B \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ кН}\cdot\text{м,}$$

де згинальний момент M від R_B стискає праві волокна, то за правилами є додатним.

Рухаючись з останнього «вільного» кінця, згинальний момент M у перерізі 5 можна знайти аналогічно перерізу 3

$$M_5 = R_C \cdot \Delta z = 0.$$

Зрозуміло, що інша сила P на цій ділянці не може створити згинальний момент, бо її плече завжди нульове.

У перерізі 6 у попередньому рівнянні Δz треба замінити на 1 м, тому

$$M_6 = R_C \cdot 1 = 4,64 \cdot 1 = 4,64 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Реакція R_C у 6-ому перерізі стискає верхні волокна, тому знак згинального моменту додатний.

На вертикальній ділянці 7...8, у перерізі 7 згинальний момент створюють три силових фактора: R_C , P та зосереджений момент $M=6,5$ кН·м, тому

$$M_7 = R_C \cdot 1 - M - P \cdot \Delta z = 4,64 \cdot 1 - 6,5 = -1,86 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

У цьому рівнянні треба дуже обережно знаходити знаки згинального моменту від кожного силового фактору.

Але це буде зрозумілим, якщо повернутись від рахункової схеми до реального стрижня рами. Ураховуючи особливості жорсткого вузла, можна встановити, якщо 1) момент реакції R_C стискає на ділянці 5...6 верхні волокна, то на ділянці 7...8 згідно принципу суперпозиції і умови рівноваги жорсткого вузла він стискає праві; 2) зосереджений момент стискає ліві волокна стійки; 3) моментом сили P при $\Delta z \rightarrow 0$ можна нехтувати.

При обчислюванні згинального моменту у перерізі 8 на залишкову частину діють ті ж самі фактори, але сила P вже має плече 2 м, тому

$$M_8 = R_A \cdot 1 - M - P \cdot 2 = 4,64 \cdot 1 - 6,5 - 4 \cdot 2 = -9,86 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для верхнього двох стрижневого жорсткого вузла особливості такі ж самі, як і для нижнього, тому на ділянці 9...10 у перерізі 9 крім R_C , P , M діє розподілене навантаження на відрізьку $q \Delta z$, тому 1) згинальний момент від R_C стискає верхні волокна цієї ділянки; 2) момент сили P стискає нижні волокна, як і зосереджений момент M .

$$M_9 = M_8 - q \cdot \Delta z \cdot \frac{\Delta z}{2} = M_8.$$

У перерізі 10, в попередньому рівнянні необхідно Δz замінити на 2 м, а у реакції R_C більше плече – 3 м.

$$M_{10} = R_C \cdot 3 - P \cdot 2 - M - q \cdot 2 \cdot 1 = 4,64 \cdot 3 - 4 \cdot 2 - 6,5 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = -6,6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На ділянці 9...10 у перерізі K , де $Q=0$, на епюрі M має бути екстремум. Підрахуємо значення z_K і $M_K = M_{EKCTP}$:

$$z_K = \frac{Q_9}{q} = \frac{4,64}{3} = 1,55 \text{ м};$$

$$\begin{aligned} M_K = M_{EKCTP} &= R_5 (1 + z_K) - P \cdot 2 - M - q \cdot \frac{z_K^2}{2} = \\ &= 4,64 \cdot 2,55 - 4 \cdot 2 - 6,5 - 3 \cdot 1,55 \cdot 0,775 = -6,27 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

За визначеними даними побудуємо (з урахуванням масштабів) епюру згинальних моментів (рис. 2.13, г).

При цьому, як вже говорилося у попередньому розділі, епюру згинальних моментів треба будувати на стиснутих волокнах. Так на ділянці 1...2, де є реакція R_A та розподілене навантаження, епюра згинальних моментів повинна бути відкладена уверх і окреслена параболою, випуклість якої спрямована назустріч дії розподіленого навантаження (див. рис. 2.13).

На ділянці 3...4 ординату епюри відкладають вправо від лінії стрижня, як від бази, і вона має вигляд похилої прямої.

На ділянці 5...6, де є реакція R_C та сила P , ординату епюри відкладають уверх у вигляді похилої прямої.

На ділянці 7...8 відсутнє зовнішнє навантаження, але вплив моменту M , сили P та реакції R_C також має місце. Лінія епюри згинальних моментів похила.

На ділянці 9...10 діє розподілене навантаження, тому епюра згинальних моментів – квадратична парабола, випуклість якої спрямована назустріч напрямку розподіленого навантаження, тобто вверх (див. рис. 2.13,г), при цьому ординату епюри відкладають від стрижня ділянки униз.

Зробимо перевірку побудови епюр, для чого розглянемо умови рівноваги жорстких вузлів L , S та G під впливом поздовжніх, поперечних сил та згинальних моментів, які діють на окремий вузол. Усі значення Q , N та M будемо брати з епюр.

Виріжемо спочатку вузол L , відокремлений перерізами 6 та 7.

В перерізі 6 на вузол діють стискаюча його сила $N=4\text{кН}$ у горизонтальному напрямку вліво та поперечна сила $Q=4,64\text{кН}$ у вертикальному напрямку вверх; а перерізі 7 – стискаюча сила $N=4,64\text{кН}$ у вертикальному напрямку униз та поперечна сила $Q=4\text{кН}$ вздовж горизонталі вправо (рис. 2.13,д). Рівновага вздовж осей y та z стає очевидною. Крім того в перерізі 6 згинальний момент $M=4,64\text{кН}\cdot\text{м}$ діє відносно вузла проти годинникової стрілки, в перерізі 7 згинальний момент $M=1,86\text{кН}\cdot\text{м}$ також проти годинникової стрілки, та ще зовнішній зосереджений момент $M=6,5\text{кН}\cdot\text{м}$ вже за годинниковою стрілкою (див. рис. 2.13,е). Стає зрозумілим, що алгебраїчна сума цих моментів, що діють на вузол, приблизно дорівнює нулю.

Аналогічно можна вирізати вузол S з перерізами 8 та 9. За допомогою епюр можна встановити рівновагу вузла вздовж осей y , z та під впливом моментів M (див. рис. 2.13,ж і к).

Виріжемо трьохстрижневий вузол G відокремлений перерізами 2, 4 та 10. В перерізі 2 на вузол діє тільки поперечна сила $Q=1,3\text{кН}$ вертикально вверх, поздовжньої сили в ньому немає. В перерізі 4 також діє одна поперечна сила $Q=4\text{кН}$ у горизонтальному напрямку вправо. У перерізі 10 діють: стискаюча сила $N=4\text{кН}$ вздовж горизонталі вліво, поперечна сила $Q=1,3\text{кН}$ вертикально униз, та згинальний момент $6,58\text{кН}\cdot\text{м}$ за годинниковою стрілкою (рис. 2.13,л). Крім того у перерізі 2 діє згинальний момент, що дорівнює $5,41\text{кН}\cdot\text{м}$, теж за годинниковою стрілкою, та у перерізі 4 момент $M=12\text{кН}\cdot\text{м}$ проти годинникової стрілки (рис. 2.13,м).

Алгебраїчна сума цих моментів дорівнює згинальному моменту

$$M_2 + M_4 + M_{10} = 5,41 - 12 + 6,5 \approx 0,09 \text{кН}\cdot\text{м}.$$

Похибка розрахунку $\frac{0,09 \cdot 100\%}{11,91}$ не перевищує 1%, що значно менше
дозволеного 5%.

Таким чином, можна вважати, що епюра згинальних моментів побудована вірно.

3 РОЗРАХУНОК ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

3.1 Симетричний складний переріз

Для складного перерізу визначити положення центра ваги, величини головних центральних моментів інерції.

Вихідні дані вибрати із таблиць 3.1 і 3.2, і рисунку 3.1.

Таблиця 3.1 – Вихідні дані до задачі 3.1

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Швелер	18	20	22	24	27	30	33	36	40	33
Двотавр	18	20	22	24	27	30	33	36	40	33

Таблиця 3.2 – Вихідні дані до задачі 3.1

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Кутик	80x50x5	90x56x8	100x63x10	140x90x10	160x100x12	180x110x12	100x63x7	140x90x8	160x100x14	180x110x12
Смуга, $h \times b, \text{ см}^2$	24x1,2	26x1,2	30x1,5	28x1,4	32x1,2	34x1,5	36x1,2	40x0,8	34x1,2	28x1,4

3.1.1 Методичні вказівки до виконання задачі 3.1

Для заданого перерізу вибрати систему осей, відносно яких визначити координати центрів ваги фігур, які до нього входять.

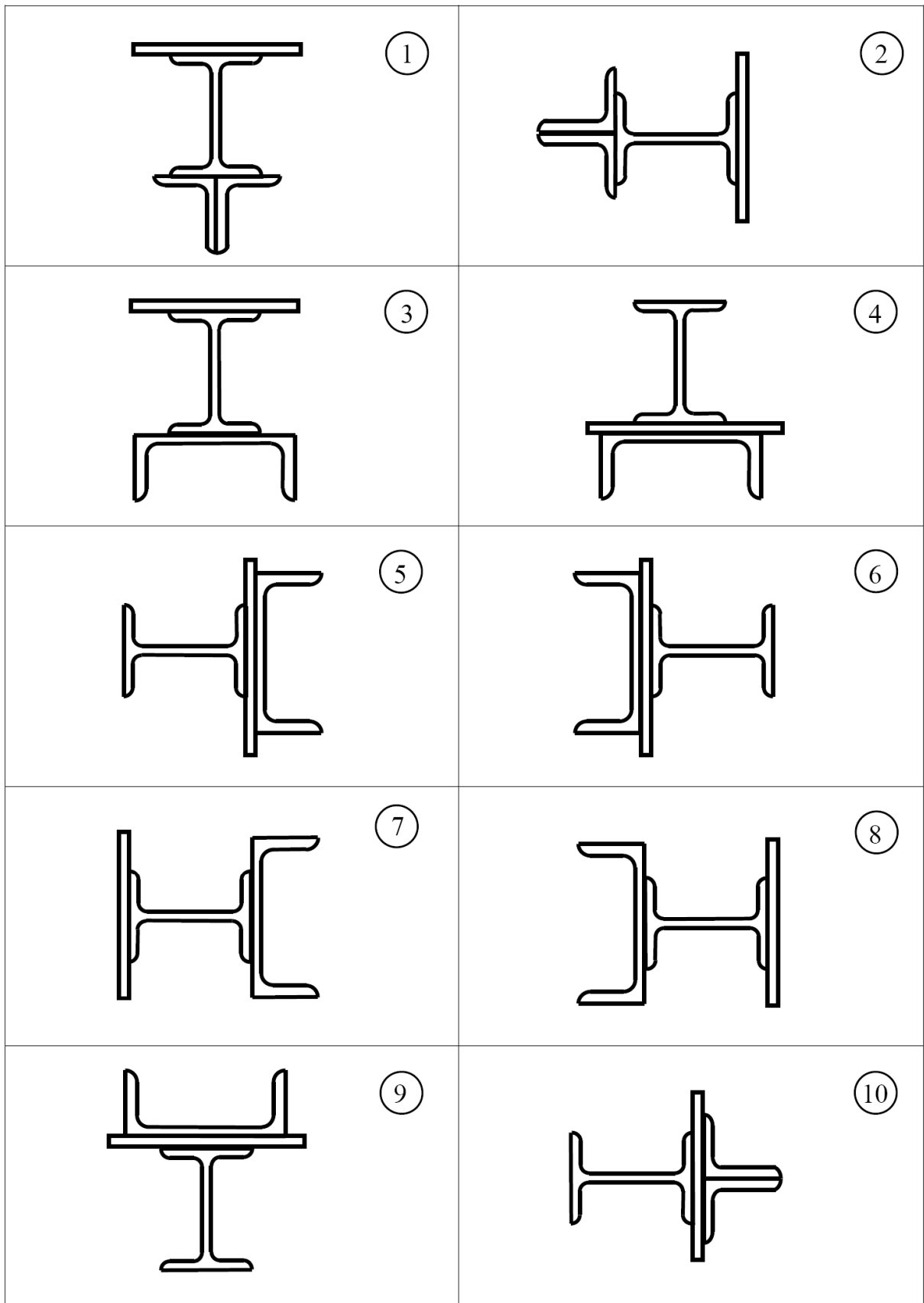


Рисунок 3.1

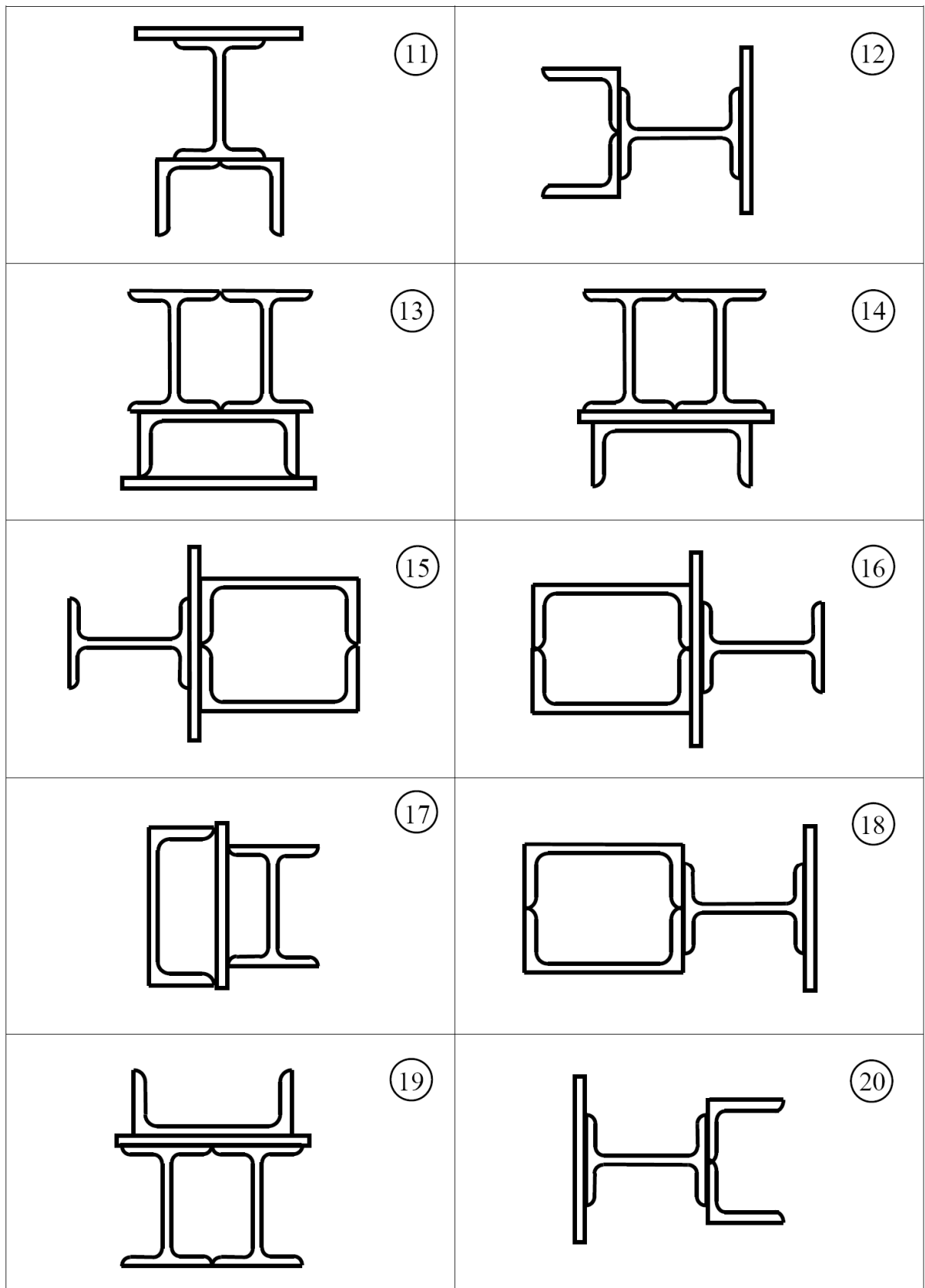


Рисунок 3.1, аркуш 2

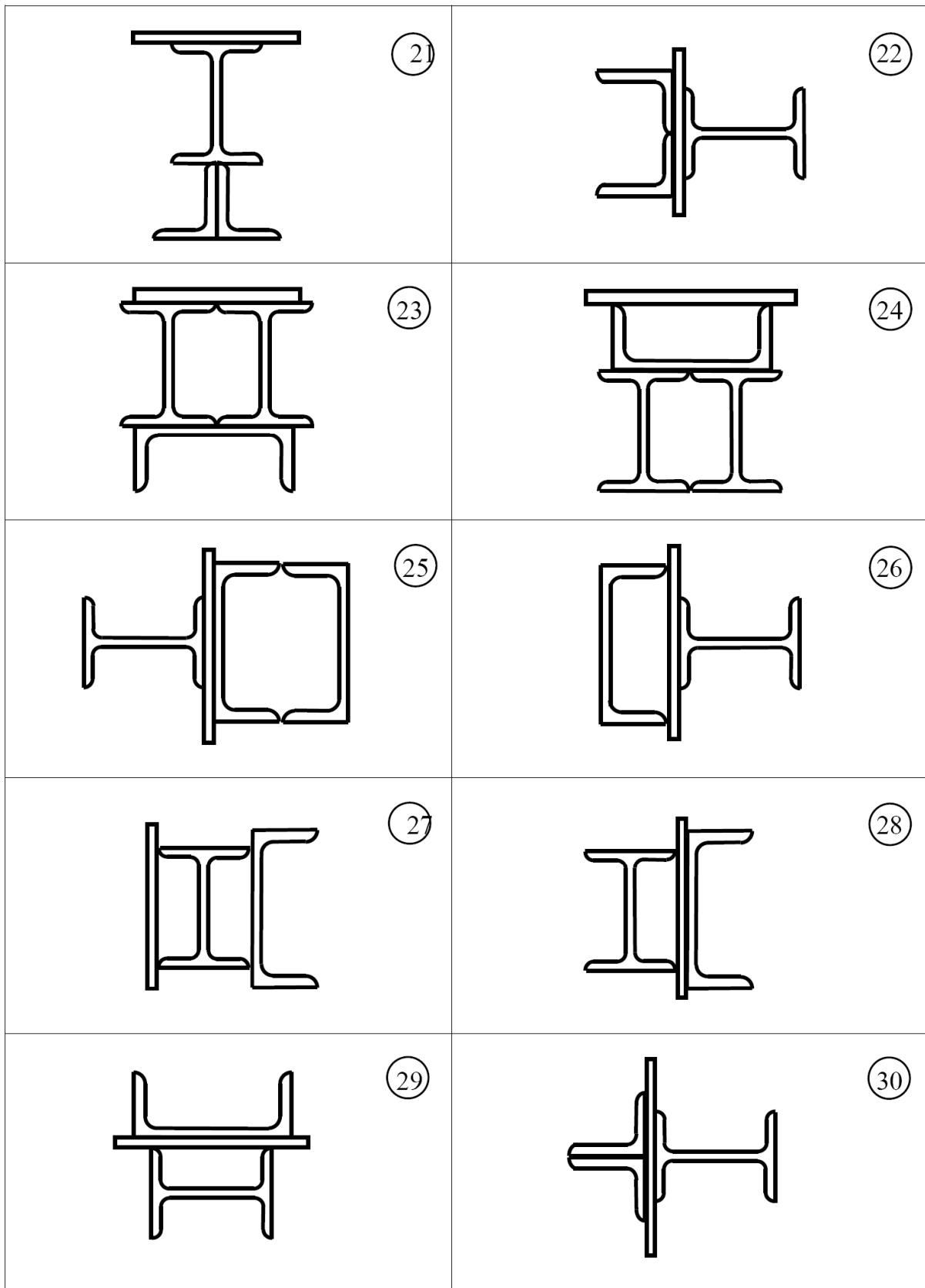


Рисунок 3.1, аркуш 3

1 За формулами визначити положення центра ваги складного перерізу:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ci} F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_{ci} F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad (3.1)$$

де x_c, y_c – координати центра ваги складного перерізу;

x_{ci}, y_{ci} – координати центрів ваги i -тої фігури у початковій системі осей;

F_i – площа поперечного перерізу i -ої фігури; n – число фігур.

2 За знайденими координатами x_c, y_c нанести положення центра ваги складної фігури.

3 Через центр ваги складної фігури провести центральні осі всього перерізу, направляючи їх паралельно центральним осям фігур.

4 Визначаються осьові моменти інерції всієї фігури щодо центральних осей фігури за формулами:

$$J_{x_c} = \sum_{i=1}^n \left(J_{x_{ci}} + a_i^2 F_i \right), \quad J_{y_c} = \sum_{i=1}^n \left(J_{y_{ci}} + b_i^2 F_i \right) \quad (3.2)$$

де J_{x_c}, J_{y_c} – осьові моменти інерції фігур, щодо власних центральних осей;

a_i – відстань між центральною віссю x_c складного перерізу і власною центральною віссю x_{ci} i -ої фігури;

b_i – відстань між центральною віссю y_c складного перерізу і власною центральною віссю y_{ci} i -ої фігури.

Для стандартних профілів типу швелера, двотавра, кутика осьові моменти інерції слід брати з таблиць сортаменту, для смуги - визначати за формулами:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{hb^3}{12},$$

де b – сторона прямокутника, яка паралельна осі x ;

h – його висота.

Оскільки фігура має вісь симетрії y_c , то відцентровий момент інерції $J_{x_c y_c} = 0$. Отже, центральні осі x_c та y_c будуть і головними.

Моменти інерції відносно головних центральних осей перерізу означаються $J_U = J_{x_c}$, $J_V = J_{y_c}$.

3.1.2 Приклад розв'язання задачі 1

Для перерізу, показаного на рисунку 3.2, необхідно визначити положення головних центральних осей і моменти інерції відносно них.

Розв'язання. Перш за все, виписуємо геометричні характеристики прокатних профілів, які приводяться у додатку А або в підручниках і збірках з опору матеріалів (наприклад, [4]).

Двотавр 24: $h=24$ см; $b=11,5$ см; $d=0,56$ см; $t=0,95$ см; $F=34,8$ см²; $J_x=3460$ см⁴; $J_y=198$ см⁴.

Швелер 22: $h=22$ см; $b=8,2$ см; $d=0,54$ см; $t=0,95$ см; $z_0=2,21$ см; $F=26,7$ см²; $J_x=151$ см⁴; $J_y=2110$ см⁴.

Тут моменти J_x і J_y поміняли місцями, оскільки швелер розташований горизонтально, а не вертикально, як у довіднику.

Для смуги геометричні характеристики обчислюємо як для прямокутника:

$$F = a_{cm} \cdot b_{cm} = 27 \cdot 1,2 = 32,4 \text{ см}^2,$$
$$J_x = \frac{27 \cdot 1,2^3}{12} = 3,888 \text{ см}^4 \approx 4 \text{ см}^4; \quad J_y = \frac{1,2 \cdot 27^3}{12} = 1970 \text{ см}^4.$$

Переріз виконуємо в масштабі (див. рис. 3.2).

Вибираємо систему координат. За початкові осі координат можна прийняти будь-яку систему, наприклад, систему осей координат, яка зв'язана з центрами ваги двотавра або швелера. За початкові приймемо осі x_2 і y_2 , тобто в центрі ваги двотавра.

Визначимо координати центрів ваги всіх фігур в вибраній початковій системі осей координат:

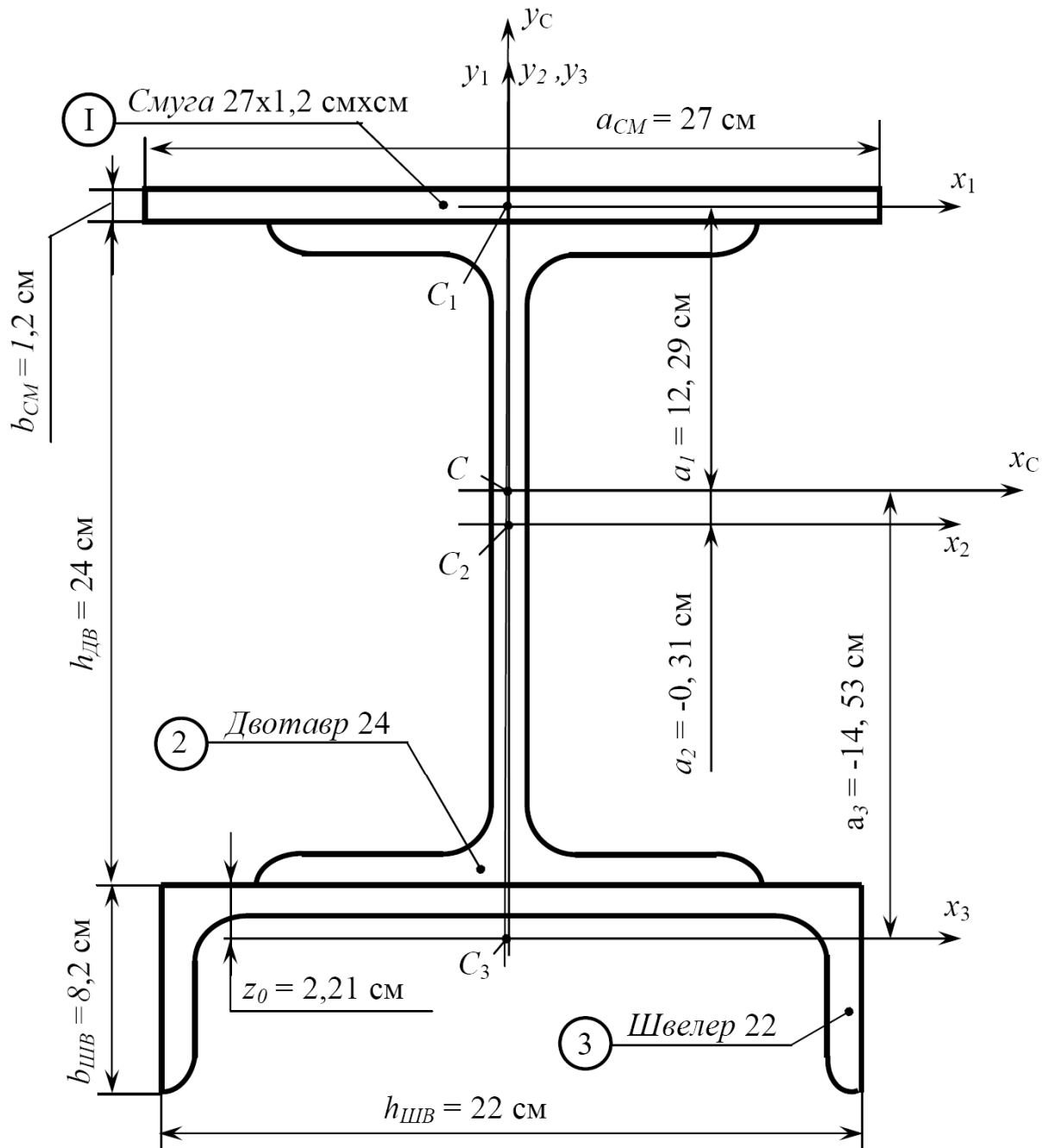


Рисунок 3.2 – Вид симетричного поперечного перерізу

$$y_{c_1} = \frac{h_{ДВ}}{2} + \frac{b_{CM}}{2} = \frac{24}{2} + \frac{1,2}{2} = 12,6 \text{ см}; \quad y_{c_2} = 0;$$

$$y_{c_3} = -\left(z_0 + \frac{h_{ДВ}}{2}\right) = 2,21 + 0,5 \cdot 24 = -14,21 \text{ см}.$$

Оскільки переріз симетричний щодо осі y_2 , то центр ваги шукаємо тільки по висоті перерізу, тобто координату y_C , яку визначаємо за формулою:

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_{c_i} F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{y_{c_1} F_1 + y_{c_2} F_2 + y_{c_3} F_3}{F_1 + F_2 + F_3} =$$

$$= \frac{12,6 \cdot 32,4 + 0 \cdot 34,8 - 14,21 \cdot 26,7}{32,4 + 34,8 + 26,7} = 0,3067 \text{ см} \approx 0,31 \text{ см}.$$

На відстані $y_c = 0,31$ см від осі x_2 проводимо головну центральну вісь x_c .

Визначимо відстань між центральною віссю x_c перерізу і власними центральними осями x_{ci} фігур:

$$a_1 = y_{c_1} - y_c = 12,6 - 0,31 = 12,29 \text{ см};$$

$$a_2 = y_{c_2} - y_c = 0 - 0,31 = -0,31 \text{ см};$$

$$a_3 = y_{c_3} - y_c = -14,21 - 0,31 = -14,52 \text{ см}.$$

Тепер визначаємо моменти інерції J_{x_c} , J_{y_c} :

$$J_{x_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_{ci}} + a_i^2 F_i) = 4 + 12,29^2 \cdot 32,4 + 3460 + 0,31^2 \cdot 34,8 +$$

$$+ 151 + 14,52^2 \cdot 26,7 = 14141,3 \text{ см}^4.$$

Оскільки центри ваги всіх трьох фігур знаходяться на осі y_c , то $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, тому

$$J_{y_c} = \sum_{i=1}^n (J_{y_{ci}} + b_i^2 F_i) = 1968,3 + 198 + 2110 = 4276,3 \text{ см}^4.$$

Оскільки фігура має вісь симетрії y_c , то відцентровий момент інерції $J_{x_c y_c} = 0$. Отже, центральні осі x_c та y_c будуть і головними.

Моменти інерції відносно головних центральних осей:

$$J_U = J_{x_c} = 14141,3 \text{ см}^4, J_V = J_{y_c} = 4276,3 \text{ см}^4.$$

3.2 Несиметричний складний переріз

Для складного перерізу, використовуючи таблиці сортаменту, аналітичним способом знайти положення головних центральних осей та величини головних центральних моментів інерції.

Вхідні дані вибрати із таблиць 3.1, 3.2 і рисунку 3.3.

3.2.1 Методичні вказівки до виконання задачі 2

Можна рекомендувати такий порядок визначення положення головних центральних осей та значень головних центральних моментів інерції складного поперечного перерізу, що складається з простих фігур, характеристики яких легко одержати.

1 Зобразити переріз у масштабі з вказівками основних розмірів фігур. Розміри прокатних профілів, положення їх центрів ваги взяти із сортаменту. Кожну фігуру позначити своїм номером.

2 Нанести на рисунок центральні осі кожної фігури за номерами, відповідними номерам фігур.

3 Вибрати початкові осі, відносно яких знайти координати центру ваги складної фігури за формулами (3.1). За початкові осі можна вибрати центральні осі однієї з фігур. Тоді координати її центра ваги будуть дорівнювати нулю. Координати x_i, y_i підставляти до формул (3.1), зважаючи на їх знаки відносно початкових осей.

4 Провести через центр ваги перерізу осі x_c, y_c , які паралельні тим центральним осям окремих фігур, відносно яких моменти інерції відомі (власні осі), відносно них взяти моменти інерції.

5 Визначити осьові (за формулами 3.2) і відцентровий момент інерції відносно центральних осей x_c, y_c складного перерізу, користуючись правилом переходу до паралельних осей.

Відцентровий момент визначаємо за формулою:

$$J_{x_c y_c} = \sum_{i=1}^n \left(J_{x_{c_i} y_{c_i}} + a_i b_i F_i \right), \quad (3.3)$$

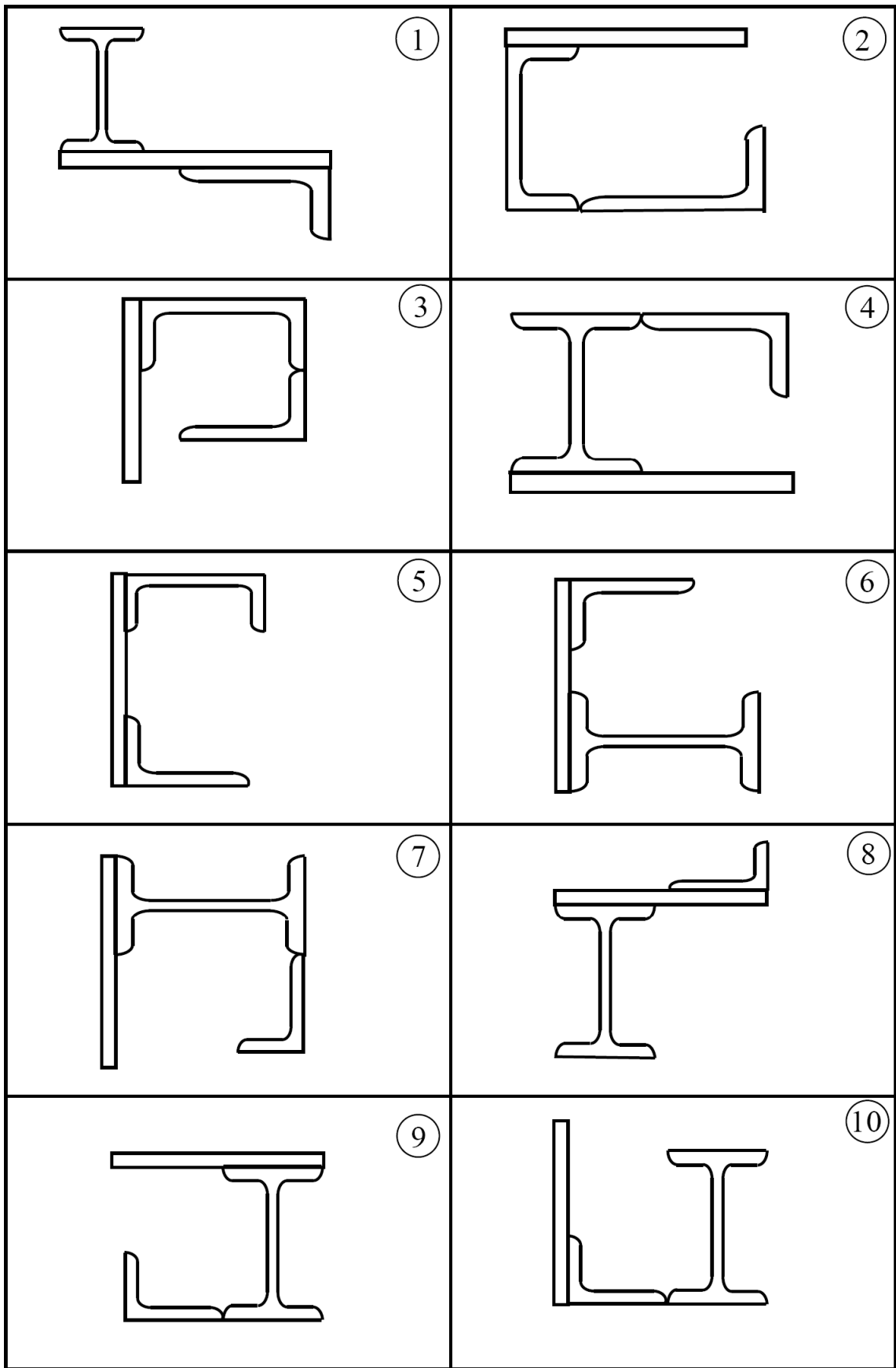


Рисунок 3.3

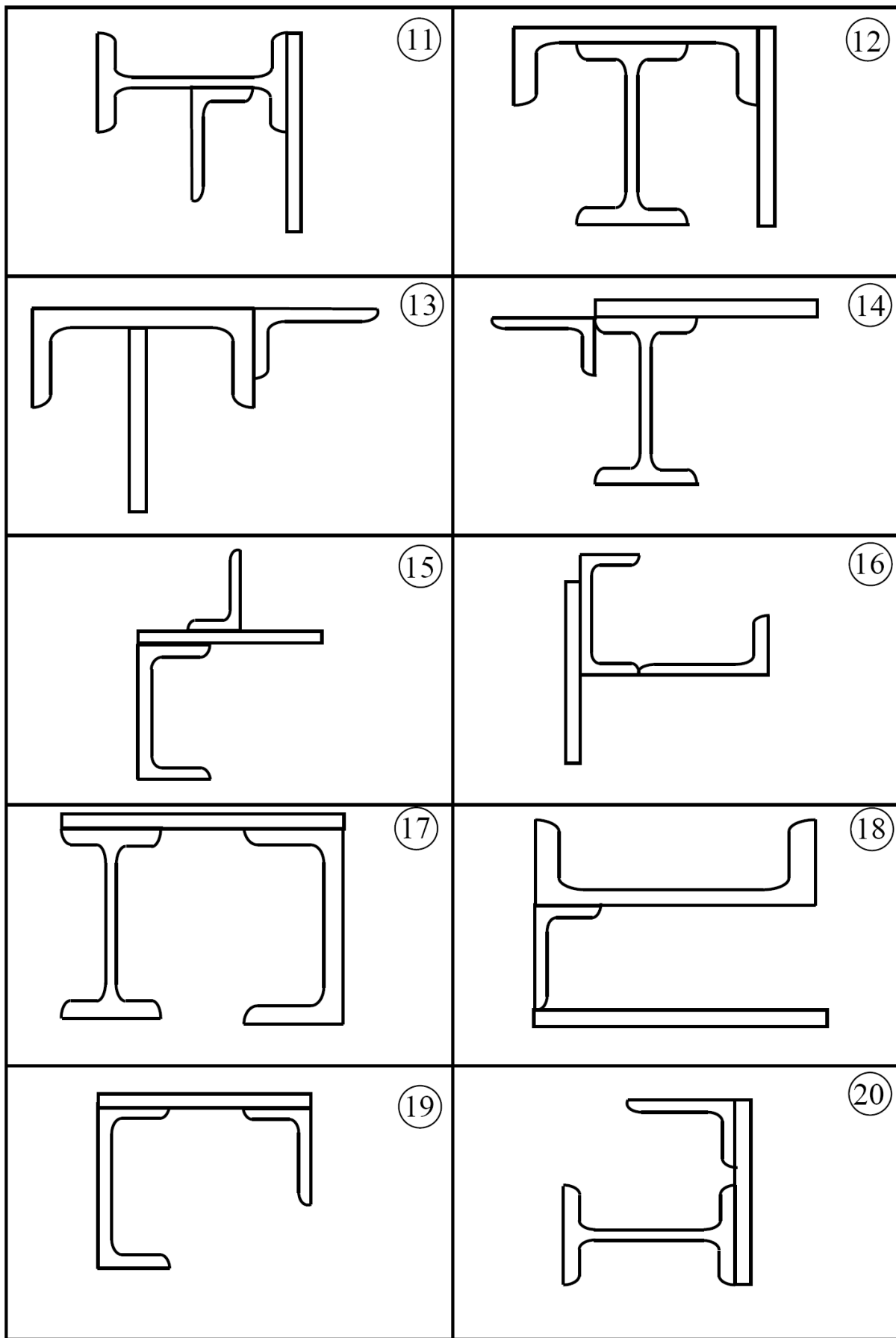


Рисунок 3.3, аркуш 2

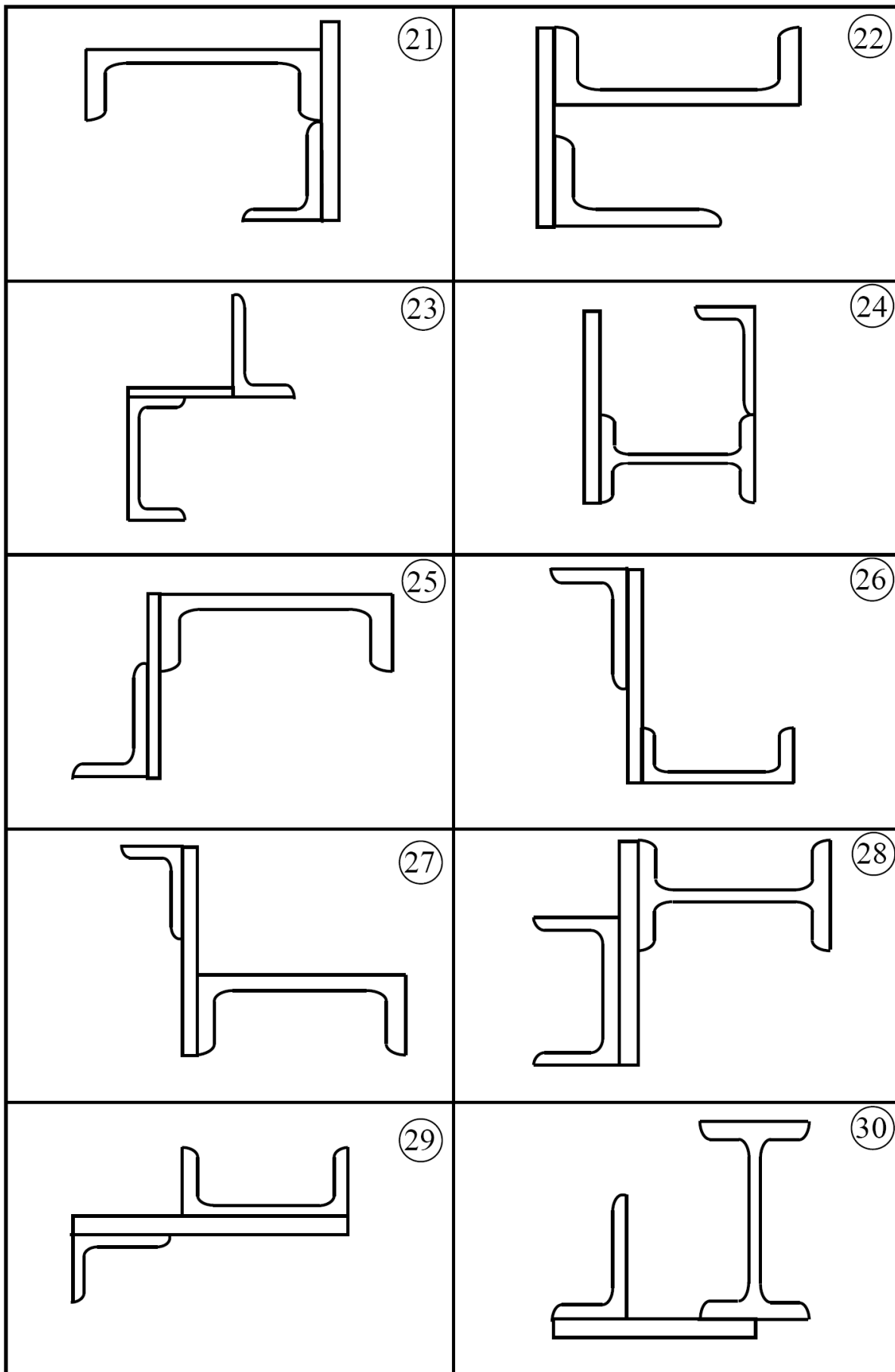


Рисунок 3.3, аркуш 3

де $J_{x_c y_c}$ – відцентровий момент інерції i -тої фігури відносно власних осей, паралельних центральним x_c, y_c перерізу.

При визначенні відцентрового моменту інерції $J_{x_c y_c}$ значення a_i та b_i підставляють, зважаючи на їх знаки за відношенням до осей x_c, y_c . Для фігур, у яких є хоч одна вісь симетрії (наприклад, прямокутник, круг, двотавр, швелер), відцентровий момент інерції $J_{x_c y_c} = 0$.

6 Визначити положення головних центральних осей U, V :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_{x_c}}. \quad (3.4)$$

7 Відкласти кут α_0 від осі x_c проти ходу годинникової стрілки, якщо він додатний, і за ходом годинникової стрілки, якщо від'ємний.

8 Визначити моменти інерції перерізу відносно головних центральних осей:

$$J_U = J_{x_c} \cos^2 \alpha_0 + J_{y_c} \sin^2 \alpha_0 - J_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0; \quad (3.5)$$

$$J_V = J_{x_c} \sin^2 \alpha_0 + J_{y_c} \cos^2 \alpha_0 + J_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0. \quad (3.6)$$

Початкові дані та результати розрахунку можна занести до таблиці 3.3

Таблиця 3.3

Переріз профілю	Номер і вид профілю	Координати центра ваги складових фігур		Площа складових фігур F_i	Моменти інерції складових фігур, см^4			a_i , см	b_i , см	α , град
		x_i	y_i		J_{x_i}	J_{y_i}	$J_{x_i y_i}$			
I										
II										
III										

9 Можна виконати перевірки, які контролюють правильність арифметичних обчислень:

$$J_{x_c} + J_{y_c} = J_U + J_V; \quad (3.7)$$

$$J_{UV} = J_{xy} \cos 2\alpha_0 + \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha_0 = 0; \quad (3.8)$$

$$J_{u/v} = \frac{1}{2} \left[(J_x + J_y) \pm \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} \right]. \quad (3.9)$$

причому, верхні знаки у формулі (3.9) беремо при $J_x > J_y$, а нижні – при $J_x < J_y$.

Результати розрахунку бажано занести до таблиці 3.3.

3.2.2 Приклад розв'язання задачі 3.2

Для перерізу, який складається зі швелера 30, нерівнобокого кутика 250x160x16 і смуги 36x1,6 см² (див. рис. 3.4), використовуючи таблиці сортаменту, аналітичним способом знайти положення головних центральних осей та величини головних центральних моментів інерції.

Розв'язання. Із сортаменту виписуємо необхідні геометричні характеристики прокатних профілів.

Швелер 30: $h=30$ см, $b=10$ см, $F=40,5$ см², $J_x=5810$ см⁴, $J_y=327$ см⁴, $z_0=2,52$ см.

Куттик 250x160x16: $B=25$ см, $b=16$ см, $x_0=3,69$ см, $y_0=8,14$ см, $F=63,6$ см², $J_x=4091$ см⁴, $J_y=1333$ см⁴, $\text{tg}\alpha=0,408$.

1 Для смуги 36x1,6 обчислюємо геометричні характеристики за формулами для прямокутника:

$$F = bh = 36 \cdot 1,6 = 57,6 \text{ см}^2$$

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{1,6 \cdot 36^3}{12} = 6221 \text{ см}^4; \quad J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{36 \cdot 1,6^3}{12} = 12,3 \text{ см}^4$$

2 Вибираємо початок координат у центрі ваги смуги C_2 .

3 Визначаємо координати центрів ваги кожної фігури у вибраній системі координат:

$$x_{C_1} = \frac{30}{2} + \frac{1,6}{2} = 15,8 \text{ см}; \quad y_{C_1} = \frac{36}{2} - 2,52 = 15,48 \text{ см};$$

$$x_{C_2} = 0; \quad y_{C_2} = 0$$

(оскільки початок координат вибрано в центрі ваги фігури 2);

$$x_{C_3} = -3,69 - \frac{1,6}{2} = -4,49 \text{ см}; \quad y_{C_3} = -\left(\frac{36}{2} - 8,14\right) = -9,86 \text{ см}.$$

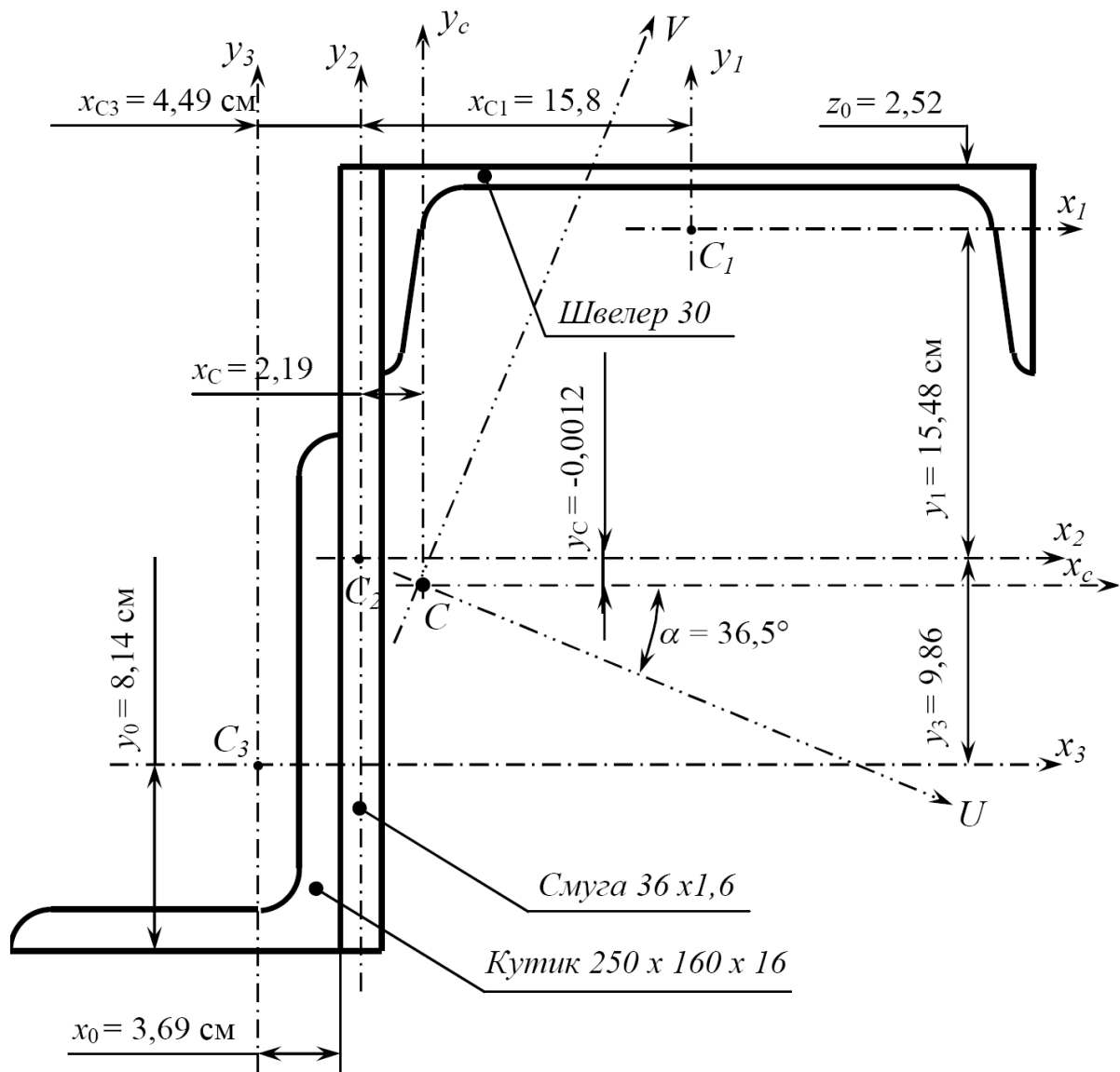


Рисунок 3.4 – Вид несиметричного складного поперечного перерізу

4 Підставляємо знайдені координати в формули (3.1) і визначаємо центр ваги всієї фігури:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ci} F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{15,8 \cdot 40,5 - 4,49 \cdot 63,6}{40,5 + 57,6 + 63,6} = 2,19 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_{ci} F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{15,48 \cdot 40,5 - 9,86 \cdot 63,6}{40,5 + 57,6 + 63,6} = -0,0012 \text{ см}.$$

5 У системі координат XU відкладаємо відрізки $x_c=2,19$ см та $y_c=0,0012$ см. Точка перетину осей x_c і y_c є центром ваги перерізу.

6 Визначаємо осьові (3.2) і відцентровий (3.3) моменти інерції відносно центральних осей x_c і y_c :

$$J_{x_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_{ci}} + a_i^2 F_i) = \sum_{i=1}^n (J_{x_{ci}} + (y_{ci} - y_c)^2 F_i) =$$

$$327 + [15,48 - (-0,0012)]^2 \cdot 40,5 + 6221 + [0 -$$

$$-(-0,0012)]^2 \cdot 52,6 + 4091 + [-9,86 -$$

$$-(-0,0012)]^2 \cdot 63,6 = 26520 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_c} = \sum_{i=1}^n (J_{y_{ci}} + b_i^2 F_i) = \sum_{i=1}^n (J_{y_{ci}} + (x_{ci} - x_c)^2 F_i) = 5810 +$$

$$+(15,8 - 2,19)^2 \cdot 40,5 + 12,3 + (0 - 2,19)^2 \cdot 52,6 + 1333 +$$

$$+(-4,49 - 2,19)^2 \cdot 63,6 = 17771 \text{ см}^4.$$

$$I_{x_c y_c} = \sum_{i=1}^n (I_{x_{ci} y_{ci}} + a_i b_i F_i) = \sum_{i=1}^n [I_{x_{ci} y_{ci}} + (x_{ci} - x_c)(y_{ci} - y_c) F_i] =$$

$$= 0 + (15,8 - 2,19)[15,48 - (-0,0012)] \cdot 40,5 + (0 - 2,19)(0 - 2,19) \cdot 57,6 +$$

$$+ 1350 + (-4,49 - 2,19)[-9,86 - (-0,0012)] \cdot 63,6 = 14067 \text{ см}^4.$$

Тут відцентровий момент інерції кутика визначався (за модулем) за формулою:

$$J_{x_3 y_3} = (J_{x_3} - J_{\min}) \sin \alpha = (4091 - 781) \cdot 0,408 = 1350 \text{ см}^4.$$

Знак відцентрового моменту інерції $J_{x_3y_3}$ у даному випадку додатний, оскільки більша частина площі кутика в системі осей x_3y_3 розташована в першому та третьому квадрантах, де координати x та y обидві додатні або від'ємні, а їх добуток додатний.

7 Визначаємо положення головних центральних осей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{x_c y_c}}{J_{x_c} - J_{y_c}} = -\frac{2 \cdot 14067}{26520 - 17771} = -3,216.$$

Звідки $2\alpha_0 = -73^\circ$, а $\alpha_0 = -36,5^\circ$.

На рисунку 3.5 під цим кутом проводимо вісь U (оскільки кут α_0 від'ємний, то по відношенню до осі x_c його відкладаємо за рухом годинникової стрілки).

8 Визначаємо головні центральні моменти інерції за формулами (3.5) і (3.6)

$$\begin{aligned} J_U &= J_{x_c} \cos^2 \alpha_0 + J_{y_c} \sin^2 \alpha_0 - J_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0 = \\ &= 26520 \cos^2(-36,5) + 17771 \sin^2(-36,5) - 14067 \sin(-2 \cdot 36,5) = \\ &= 26520 \cdot 0,805^2 + 17771 \cdot 0,59^2 - 14067 \cdot (-0,956) = 36820 \text{ см}^4; \\ J_V &= J_{x_c} \sin^2 \alpha_0 + J_{y_c} \cos^2 \alpha_0 + J_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0 = \\ &= 26520 \sin^2(-36,5) + 17771 \cos^2(-36,5) - 14067 \sin(-2 \cdot 36,5) = \\ &= 26520 \cdot 0,59^2 + 17771 \cdot 0,805^2 - 14067 \cdot (-0,956) = 7300 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

9 Одержані значення заносимо до таблиці 3.4

10 Аналізуємо одержані результати:

всі осьові моменти інерції ($J_{x_c}, J_{y_c}, J_u, J_v$) повинні бути додатними;

$$7300 + 36820 = 26520 + 17771$$

тобто $44120 \approx 44291$, що становить похибку

$$\frac{44291 - 44120}{44120} \cdot 100\% = 0,39\%$$

(допустима похибка повинна бути не більшою від 2%).

Перевіримо значення отриманих моментів інерції

$$J_u = \frac{1}{2} \left[(J_x + J_y) + \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[(26520 + 17771) + \sqrt{(26520 - 17771)^2 + 4 \cdot 14067^2} \right] = 36820 \text{ см}^4;$$

$$J_v = \frac{1}{2} \left[(J_x + J_y) - \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} \right] =$$



$$= \frac{1}{2} \left[(26520 + 17771) - \sqrt{(26520 - 17771)^2 + 4 \cdot 14067^2} \right] = 7300 \text{ см}^4;$$

$$J_{UV} = J_{xy} \cos 2\alpha_0 + \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha_0 =$$

$$= 14067 \cdot \cos(-73) + \frac{26520 - 17771}{2} \cdot \sin(-73) = 4112,79 - 4183,35.$$

Похибка $\frac{4112,79 - 4183,35}{-4183,35} \cdot 100\% = 1,7 \%$

Таблиця 3.4

Переріз профілю	Номер і вид профілю	Координати центра ваги складових фігур		Площа складових фігур	Моменти інерції складових фігур, см ⁴			a _i , см	b _i , см
		x _i	y _i		F _i	J _{xi}	J _{yi}		
I	1 	15,8	15,48	40,5	327	5810	0	15,4812	13,61
II	2 	0	0	57,6	6221	12,3	0	0,0012	-2,19
III	3 	-4,49	-9,86	63,6	4091	1350	1350	-9,86	-6,68

4 ПЛОСКЕ ЗГИНАННЯ І СКЛАДНИЙ ОПІР

4.1 Повна перевірка міцності балки

Підібрати розміри перерізу сталеві двотаврової балки і зробити повну її перевірку на міцність за IV теорією міцності.

Вихідні дані вибрати із таблиць 4.1 та 4.2 і рисунка 4.1.

Таблиця 4.1 – Вихідні дані до задачі 4.1

Величина	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$[\sigma]$, МПа	150	160	170	220	140	180	200	120	210	190
M , кН·м	20	50	80	30	40	65	35	55	45	70
P , кН	30	40	60	70	20	35	65	25	45	55
q , кН/м	12	10	14	20	16	22	18	15	18	24

Таблиця 4.2 – Вихідні дані до задачі 4.1

Величина, м	Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	2,0	2,2	2,4	2,3	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	2,1
b	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7
c	1,6	1,4	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5

4.1.1 Методичні вказівки до виконання задачі 4.1

Розв'язання задачі здійснюється у такій послідовності:

- 1 Визначаються опорні реакції балки.
- 2 Будуються епюри поперечних сил Q та згинальних моментів M .
- 3 З аналізу епюри згинальних моментів визначається максимальний згинальний момент M_{max} .

4 З умови міцності за нормальними напруженнями визначається потрібний осьовий момент опору перерізу W_x :

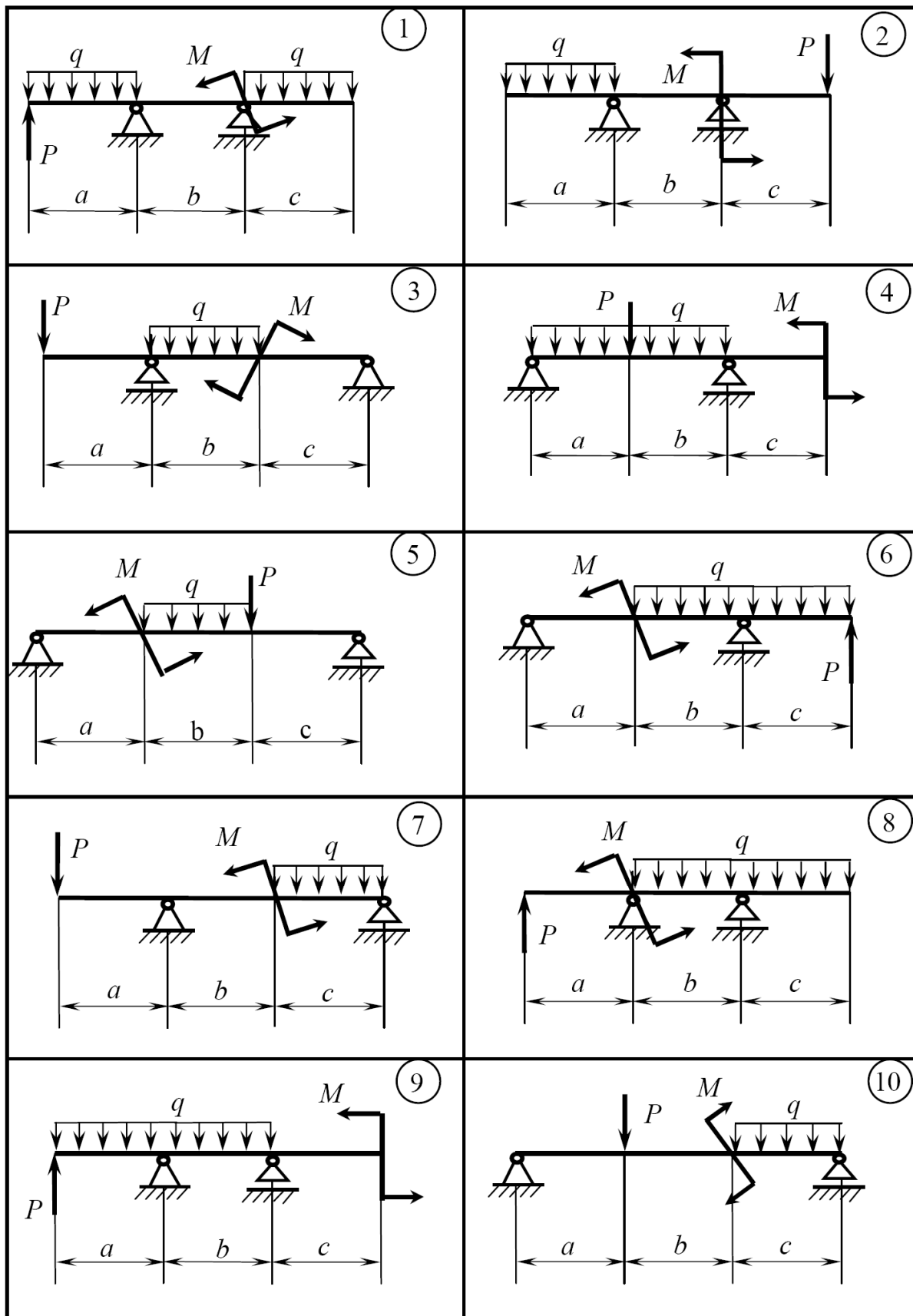


Рисунок 4.1

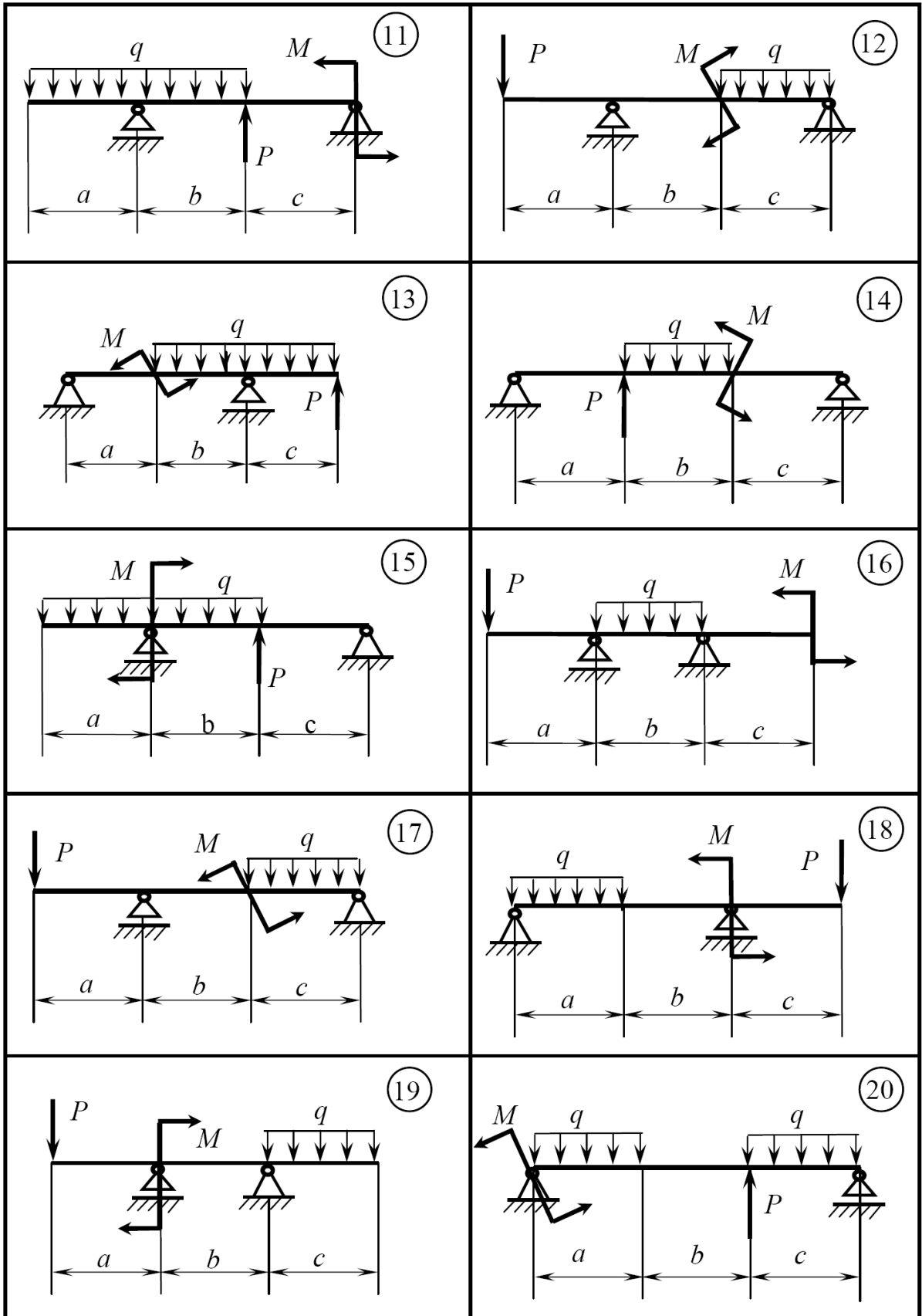


Рисунок 4.1, аркуш 2

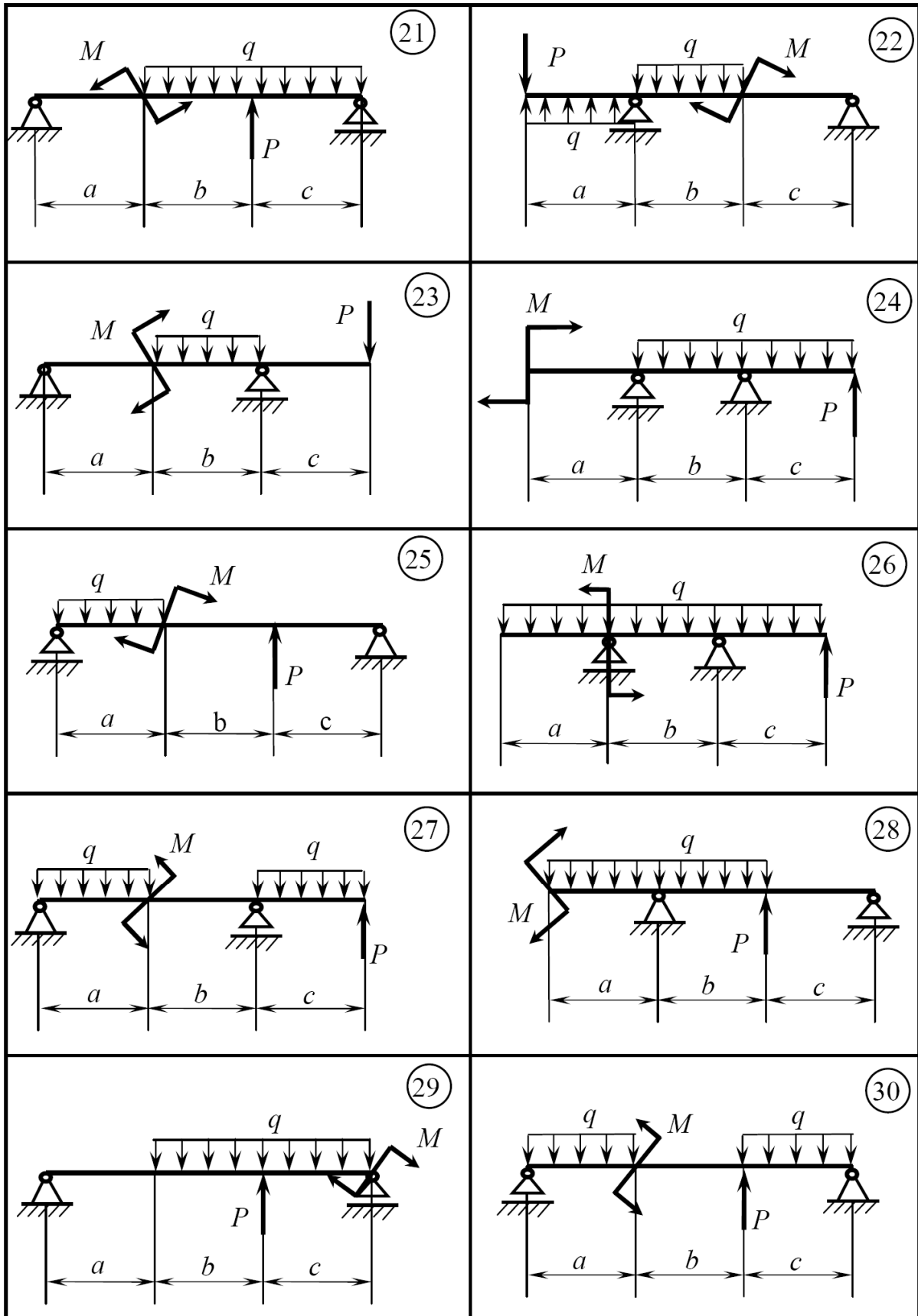


Рисунок 4.1, аркуш 3

$$W_x \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]}. \quad (4.1)$$

5 Із сортаменту вибирається номер двотавра, який має найближчий до визначеного осьовий момент опору, також його основні характеристики.

6 Перевіряється міцність за нормальними напруженнями відповідно до умови:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma] \quad (4.2)$$

7 З аналізу епюри поперечних сил визначається максимальна поперечна сила Q_{max} .

8 Перевіряється міцність за дотичними напруженнями відповідно до умови:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_x}{d \cdot I_x} \leq [\tau], \quad (4.3)$$

де S_x – статичний момент половини площини перерізу вибраного профілю відносно осі X (рис. 4.2);

d – ширина перерізу на осі X ;

I_x – момент інерції перерізу відносно осі X ;

$$[\tau] = 0,6[\sigma]. \quad (4.4)$$

9 Перевіряється міцність за еквівалентними напруженнями відповідно до умови:

$$\sigma_{екв}^{max} \leq [\sigma], \quad (4.5)$$

де $\sigma_{екв}^{max}$ – найбільше зі значень еквівалентних напружень у точках K (див. рис. 4.2) тих перерізів балки, у яких: $M = M_{max}$ і $Q \neq 0$; $Q = Q_{max}$ і $M \neq 0$; M і Q хоча і не максимальні, але одночасно достатньо великі.

Підрахунки еквівалентних напружень в точках K зазначених перерізів виконуються із застосуванням формул:

$$\sigma_K^{екв} = \sqrt{\sigma_K^2 + 3\tau_K^2}; \quad (4.6)$$

$$\sigma_K = \frac{M}{I_x} \cdot Y_k; \quad (4.7)$$

$$\tau_K = \frac{Q \cdot S_x^*}{d \cdot I_x}, \quad (4.8)$$

де M і Q – відповідно згинальний момент і поперечна сила в кожному із зазначених перерізів;

Y_k – відстань точки K до осі X (див. рис. 4.2):

$$Y_k = \frac{h}{2} - t; \quad (4.9)$$

S_x^* – статичний момент відносно осі X частини перерізу, яка розташована вище точки K :

$$S_x^* = 0,5 \cdot b \cdot t(h - t). \quad (4.10)$$

Підрахунок $\sigma_K^{екв}$ у найбільш навантаженому (небезпечному) перерізі супроводжується рисунком, на якому проставляються конкретні значення розмірів перерізу та величини σ_K і τ_K .

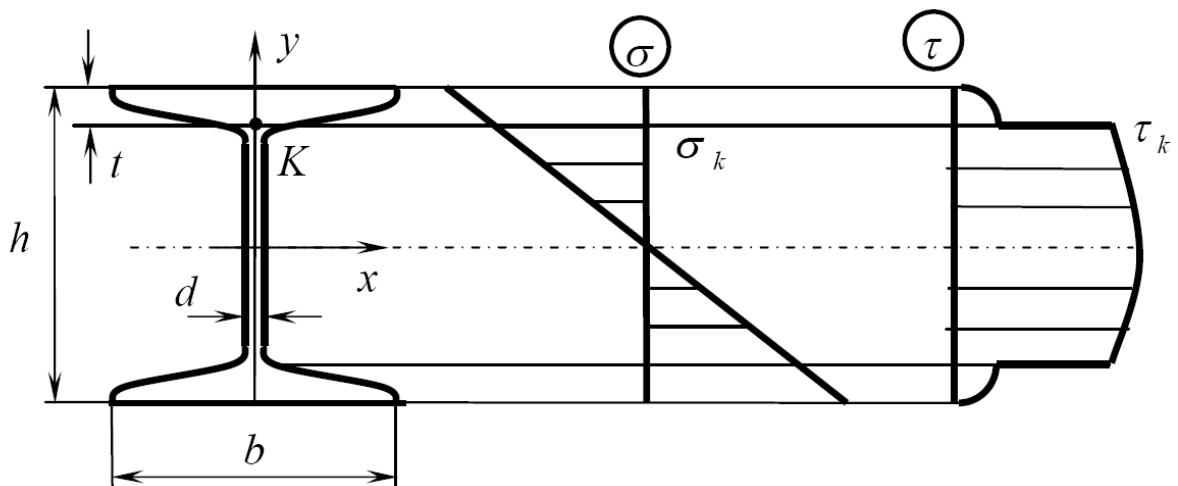
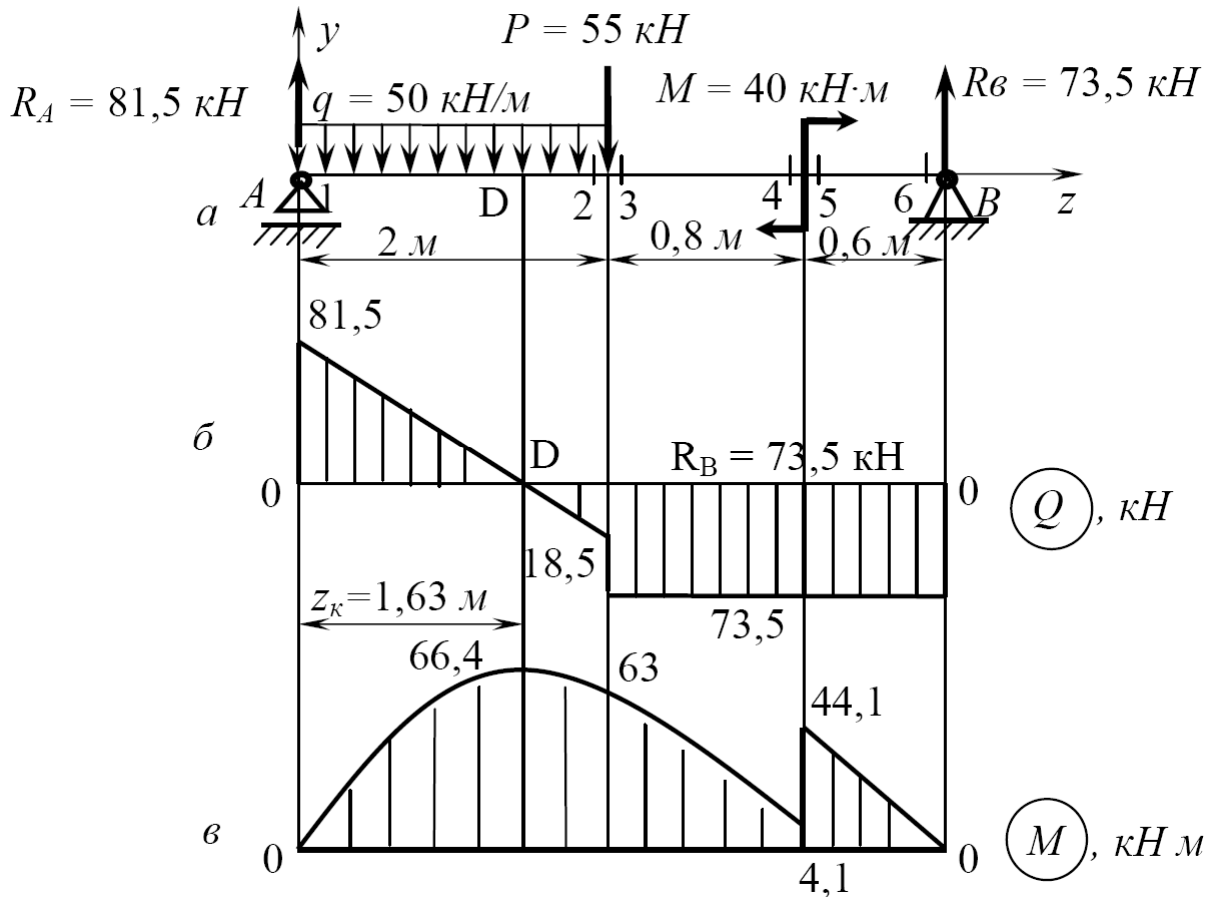


Рисунок 4.2 – Епюри нормальних (σ) та дотичних (τ) напружень у поперечних перерізах балки

4.1.2 Приклад розв'язання задачі 4.1

Схема балки та її навантаження зображені на рисунку 4.3. Розрахунки виконуємо відповідно до $[\sigma] = 150 \text{ МПа}$.

Розв'язання.



a – схема балки; *б* – епюра поперечних сил; *в* – епюра згинальних моментів

Рисунок 4.3 – Схема балки і основні графічні побудови

Із умов рівноваги визначимо опорні реакції балки (див. рис. 4.3, а):

$$\sum M_A = 0; \quad -q \cdot 2 \cdot 1 - P \cdot 2 - M + R_B \cdot 3,4 = 0;$$

$$R_B = \frac{50 \cdot 2 \cdot 1 + 55 \cdot 2 + 40}{3,4} = 73,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad q \cdot 2 \cdot 2,4 + P \cdot 1,4 - M - R_A \cdot 3,4 = 0;$$

$$R_A = \frac{50 \cdot 2 \cdot 2,4 + 55 \cdot 1,4 - 40}{3,4} = 81,5 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\begin{aligned}\sum P_Y &= 0; R_A - q \cdot 2 - P + R_B = 0; \\ 81,5 - 50 \cdot 2 - 55 + 73,5 &= 0; \\ 155 - 155 &= 0.\end{aligned}$$

Таким чином, реакції балки визначені вірно.

2 Визначимо величини поперечних сил Q та згинальних моментів M у характерних перерізах балки і побудуємо відповідні епюри (рис. 4.3, б; в):

$$\begin{aligned}Q_1 &= R_A = 81,5 \text{ кН}; \\ Q_2 &= R_A - q \cdot 2 = 81,5 - 50 \cdot 2 = -18,5 \text{ кН}; \\ Q_3 &= R_A - q \cdot 2 - P = 81,5 - 50 \cdot 2 - 55 = -73,5 \text{ кН}; \\ Q_4 &= Q_3 = -73,5 \text{ кН}; \\ Q_5 &= Q_4 = -73,5 \text{ кН}; \\ Q_6 &= Q_5 = -73,5 \text{ кН}.\end{aligned}$$

На ділянці 1-2 епюра Q змінює знак. Визначимо відстань Z_k до перерізу, де $Q = 0$ і де на епюрі M буде екстремум:

$$\begin{aligned}Z_D &= \frac{Q_1}{q} = \frac{81,5}{50} = 1,63 \text{ м}; \\ M_1 &= 0; \\ M_2 &= R_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 81,5 \cdot 2 - 50 \cdot 2 \cdot 1 = 63 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_3 &= M_2 = 63 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_4 &= R_B \cdot 0,6 - M = 73,5 \cdot 0,6 - 40 = 4,1 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_5 &= R_B \cdot 0,6 = 73,5 \cdot 0,6 = 44,1 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_D &= R_A \cdot 1,63 - 50 \cdot 1,63 \cdot \frac{1,63}{2} = 66,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

3 На епюрі згинальних моментів знаходимо максимальний за модулем згинальний момент: $M_{max} = 66,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

4 Знаходимо необхідний осьовий момент опору перерізу балки:

$$W_x \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{66,4 \times 10^3}{150} = 443 \text{ см}^3.$$

5 У сортаменті знаходимо потрібний номер двотавра. Вибираємо двотавр 30, у якого: $W_x=472 \text{ см}^3$; $h=300 \text{ мм}$; $b=135 \text{ мм}$; $d=6,5 \text{ мм}$; $t=10,2 \text{ мм}$; $I_x=708 \text{ см}^4$; $S_x=268 \text{ см}^3$.

6 Перевіряємо міцність балки за нормальними напруженнями:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{66,4 \times 10^6}{472 \times 10^3} = 141 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Ця умова міцності є забезпеченою.

7 На епюрі поперечних сил знаходимо максимальну за модулем поперечну силу: $Q_{max}=81,5 \text{ кН}$.

8 Перевіряємо міцність балки за дотичними напруженнями:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_x}{d \cdot I_x} = \frac{81,5 \cdot 10^3 \cdot 268 \cdot 10^3}{6,5 \cdot 7080 \cdot 10^4} = 47,5 \text{ МПа};$$

$$[\tau] = 0,6 \cdot [\sigma] = 0,6 \cdot 150 = 90 \text{ МПа}; \tau_{max} < [\tau].$$

Таким чином, і ця умова міцності є забезпеченою.

9 Аналізуючи епюри Q та M , бачимо, що небезпечним з точки зору еквівалентних напружень є переріз 3, в якому величини Q і M хоча і не максимальні, але одночасно достатньо великі: $Q_3=73,5 \text{ кН}$; $M_3=63 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Тому максимальні еквівалентні напруження в балці будуть мати місце в точці K (де поєднуються полиця і ребро двотавра) саме цього перерізу (рис. 4.4):

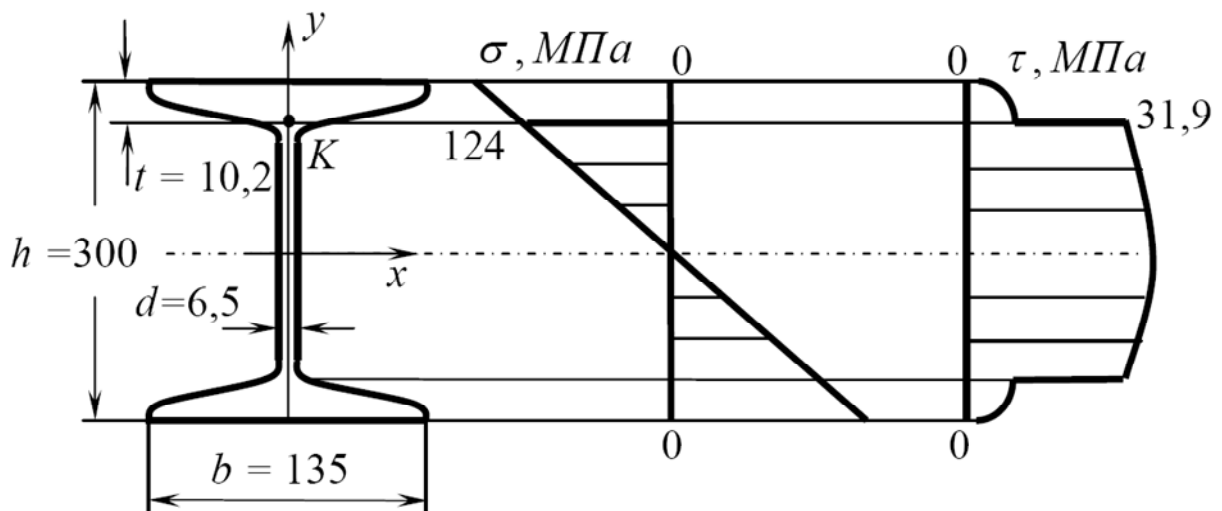


Рисунок 4.4 – Схема до визначення еквівалентних напружень у небезпечному перерізі балки

$$\sigma_{екв}^{max} = \sqrt{\sigma_{\kappa}^2 + 3\tau_{\kappa}^2};$$

$$\sigma_{\kappa} = \frac{M_3}{I_x} \cdot Y_k = \frac{M_3}{I_x} \cdot \left(\frac{h}{2} - t\right) = \frac{63 \cdot 10^6}{7080 \cdot 10^4} \cdot \left(\frac{300}{2} - 10,2\right) = 124 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\kappa} = \frac{|Q_3| \cdot S_x^*}{d \cdot I_x} = \frac{|Q_3| \cdot 0,5 \cdot b \cdot t(h-t)}{d \cdot I_x} =$$

$$= \frac{73,5 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 135 \cdot 10,2 \cdot (300 - 10,2)}{6,5 \cdot 7080 \cdot 10^4} = 31,9 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{екв}^{max} = \sqrt{124^2 + 3 \cdot 31,9^2} = 136 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Умова міцності за еквівалентними напруженнями також є забезпеченою.

4.2 Складне згинання

Для заданої балки, що перебуває в умовах складного згинання, визначити найбільші за модулем нормальні напруження та побудувати епюру напружень в небезпечному перерізі.

Вихідні дані вибрати із таблиць 4.3 та 4.4 і рисунку 4.5.

Таблиця 4.3 – Вихідні дані до задачі 4.2

Величина	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q , кН/м	34	24	32	36	30	40	28	20	26	32
P , кН	10	8	12	14	10	10	12	8	12	6
M , кН·м	25	24	22	20	18	16	10	18	12	10

4.2.1 Методичні вказівки до задачі 4.2

Розв'язання задачі відбувається у такій послідовності:

1 Зображується схема балки з навантаженням у вертикальній площині й визначаються її вертикальні реакції.

2 Будуються епюри поперечних сил Q_y і згинальних моментів M_x .

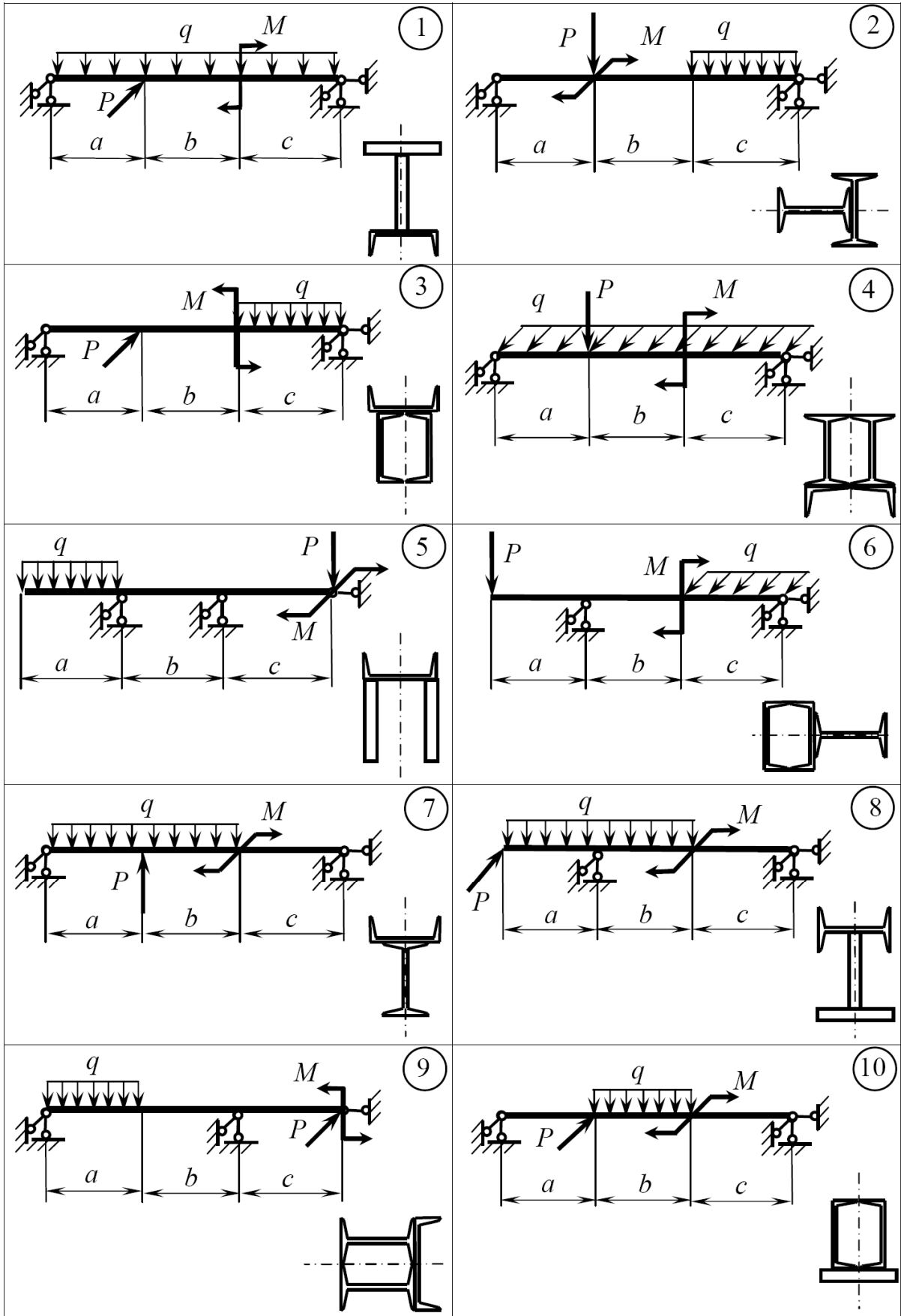


Рисунок 4.5

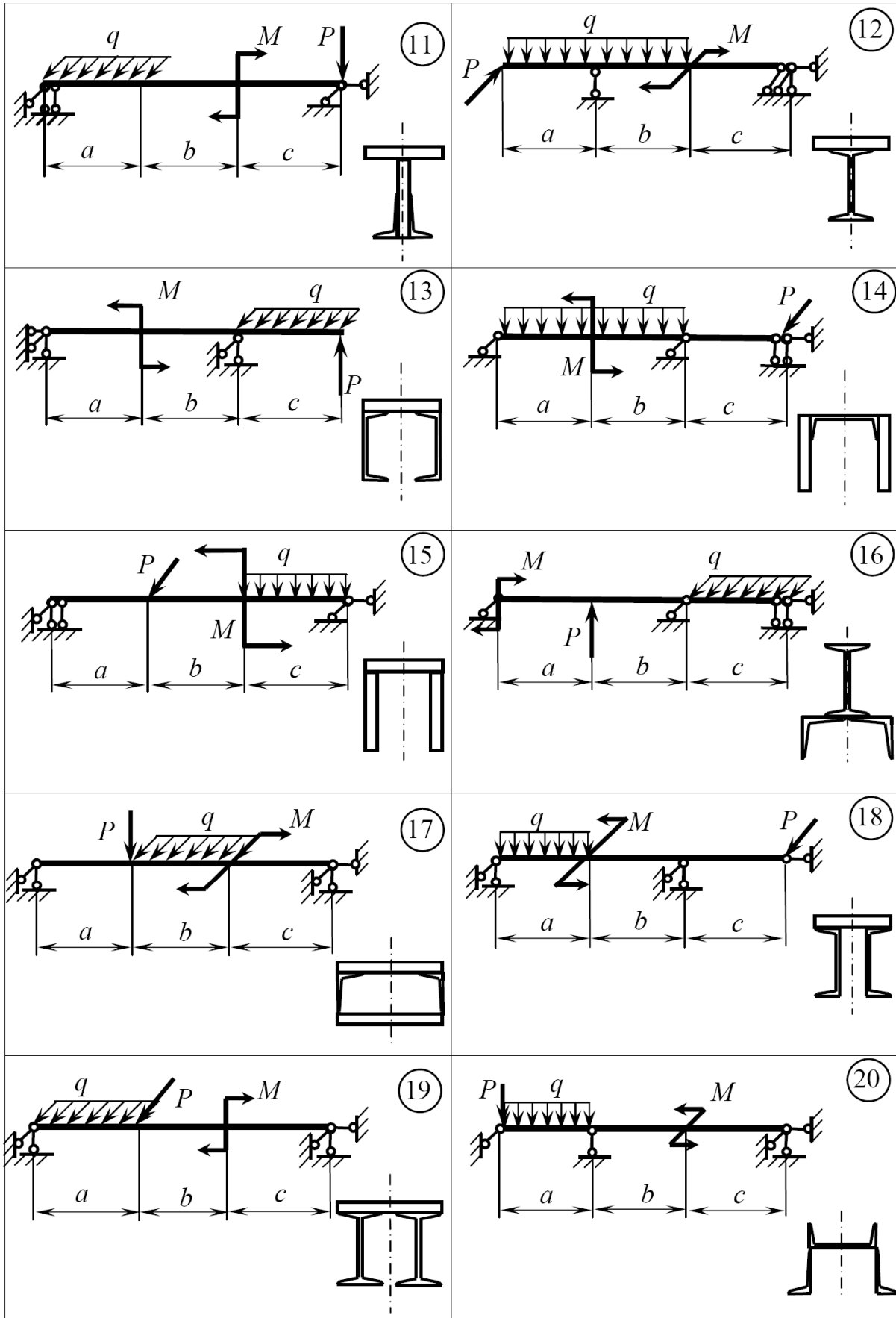


Рисунок 4.5, аркуш 2

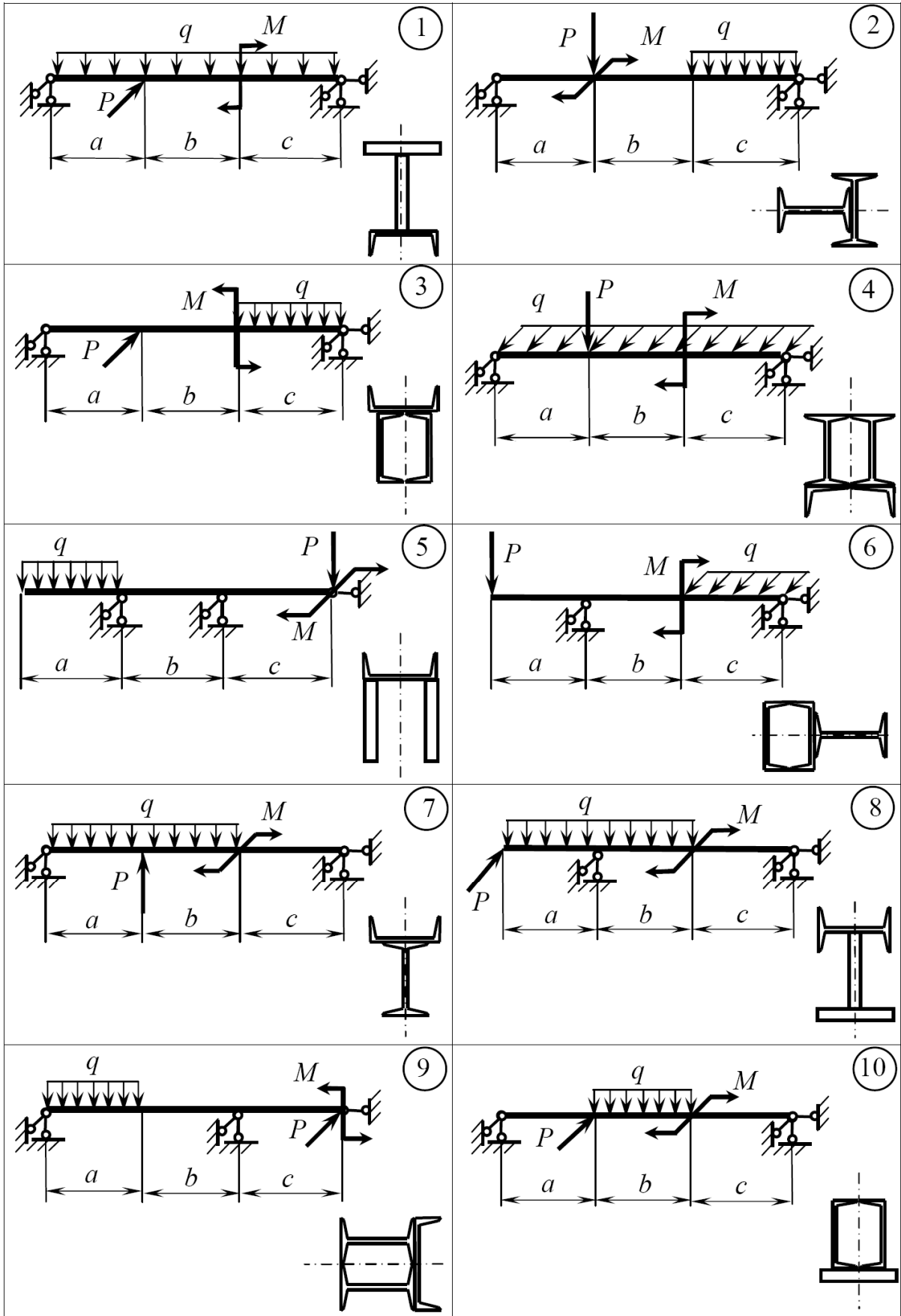


Рисунок 4.5, аркуш 3

Таблиця 4.4 – Вихідні дані до задачі 4.2

Величина		Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Розмір, м	c	1,3	0,7	0,8	1,2	0,9	1,1	1,4	1,9	1,0	0,7
	b	1,9	2,0	1,6	1,8	2,3	2,5	1,8	2,5	2,2	2,1
	a	1,4	2,0	2,3	0,7	0,9	1,7	2,1	1,4	2,0	2,5
Номер двотавра		20	30	27	22	24	22	24	20	27	30
Номер швелера		33	27	36	30	33	24	30	27	36	24
Розміри, мм	кутика	200x125x12	125x80x10	180x110x12	140x90x10	125x80x12	160x100x9	140x90x8	180x110x10	160x100x12	200x125x11
	смуги	400x20	320x10	220x18	280x14	250x16	200x18	280x12	250x14	320x11	400x16

3 Зображується схема балки з навантаженням у горизонтальній площині і визначаються її горизонтальні реакції.

4 Будуються епюри поперечних сил Q_x і згинальних моментів M_y .

5 Аналізуються епюри згинальних моментів і визначається найбільше навантажений (небезпечний) переріз балки. Якщо M_x та M_y мають найбільші за модулем значення в одному і тому самому перерізі, то саме цей переріз і є небезпечним. Коли ж найбільші значення M_x та M_y належать різним перерізам, то обидва ці перерізи беруться до уваги як потенційно небезпечні, тобто такі, за якими слід вести паралельні розрахунки.

Крім зазначених до числа потенційно небезпечних треба включати і такі перерізи (їх може бути декілька), у яких значення M_x та M_y хоча і не максимальні, але одночасно достатньо великі.

6 Переріз зображується в певному масштабі і визначається положення його центра ваги.

7 Підраховуються моменти інерції перерізу відносно головних центральних осей – I_{x_c} та I_{y_c} .

8 Визначається кут нахилу нейтральної лінії до осі X_C у кожному з потенційно небезпечних перерізів:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_{X_C}}{I_{Y_C}}, \quad (4.11)$$

де M_y і M_x враховуються зі своїми знаками: кожен з них вважається додатним, якщо спричиняє розтягання волокон балки в частині перерізу, що належить до першого квадранта координатної площини $S_{x_C y_C}$.

У кожному з потенційно небезпечних перерізів зображується нейтральна лінія і визначаються координати (в системі головних центральних осей) найбільше віддалених від неї точок у розтягненій (X_A, Y_A) та стиснутій (X_B, Y_B) зонах. При зображенні нейтральної лінії кут β , якщо він додатний, слід відкладати від осі X_C у напрямку, протилежному ходу годинникової стрілки, а якщо він від'ємний – у зворотному напрямку.

Вірність побудови нейтральної лінії можна перевірити, зважаючи на знаки напружень від M_x і M_y у кожному з квадрантів: вона проходить через ті з них, у яких знаки напружень від M_x і M_y протилежні.

10 Визначаються найбільші розтягуючі (σ_{max}^+) і найбільші стискаючі (σ_{max}^-) напруження в кожному з потенційно небезпечних перерізів:

$$\sigma_{max}^+ = \sigma_A = \frac{M_x}{I_{x_C}} \cdot Y_A + \frac{M_y}{I_{y_C}} \cdot X_A, \quad (4.12)$$

$$\sigma_{max}^- = \sigma_B = \frac{M_x}{I_{x_C}} \cdot Y_B + \frac{M_y}{I_{y_C}} \cdot X_B. \quad (4.13)$$

Тут, як і раніше, величини M_x і M_y беруться з урахуванням їхніх знаків.

11 Шляхом порівняння (за модулем) напружень у точках A і B усіх потенційно небезпечних перерізів остаточно визначаються небезпечний переріз і найбільше напруження в балці.

12 Будуються епюри напружень у небезпечному перерізі балки. Спочатку проводиться база (нульова лінія) епюри перпендикулярно до нейтральної лінії. Після цього з точок A і B перерізу паралельно до нейтральної лінії проводяться прямі до перетину з базою і від неї уздовж цих прямих відкладаються відрізки, що дорівнюють у певному масштабі величинам

σ_A і σ_B . Оскільки зазначені напруження мають протилежні знаки, відповідно до них відрізки відкладаються по різні боки від бази. Кінці відрізків з'єднуються прямою, яка в разі вірної побудови повинна перетинати базу в тій самій точці, що й нейтральна лінія.

4.2.2 Приклад розв'язання задачі 4.2

Вихідні дані прикладу наведені на рисунку 4.6.

1 Зобразимо схему балки з навантаженням у вертикальній площині (рис. 4.6, в) і визначимо її вертикальні реакції:

$$\sum M_D = 0; \quad R_E^Y \cdot 3 - q \cdot 1,6 \cdot 2,2 = 0, \quad R_E^Y = \frac{30 \cdot 1,6 \cdot 2,2}{3} = 35,2 \text{ кН};$$

$$\sum M_E = 0; \quad -R_D^Y \cdot 3 - q \cdot 1,6 \cdot 0,8 = 0, \quad R_D^Y = \frac{30 \cdot 1,6 \cdot 0,8}{3} = 12,8 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum P_y = R_D^Y + R_E^Y - q \cdot 1,6 = 12,8 + 35,2 - 30 \cdot 1,6 = 48 - 48 = 0.$$

2 Визначаємо величини поперечних сил і згинальних моментів у вертикальній площині і будуємо епюри Q_y та M_x (рис. 4.6, д; ж).

$$Q_1^Y = R_D^Y = 12,8 \text{ кН}; \quad Q_2^Y = Q_1^Y = 12,8 \text{ кН}; \quad Q_3^Y = Q_2^Y = 12,8 \text{ кН};$$

$$Q_4^Y = Q_3^Y - q \cdot 1,6 = 12,8 - 30 \cdot 1,6 = 35,2 \text{ кН}.$$

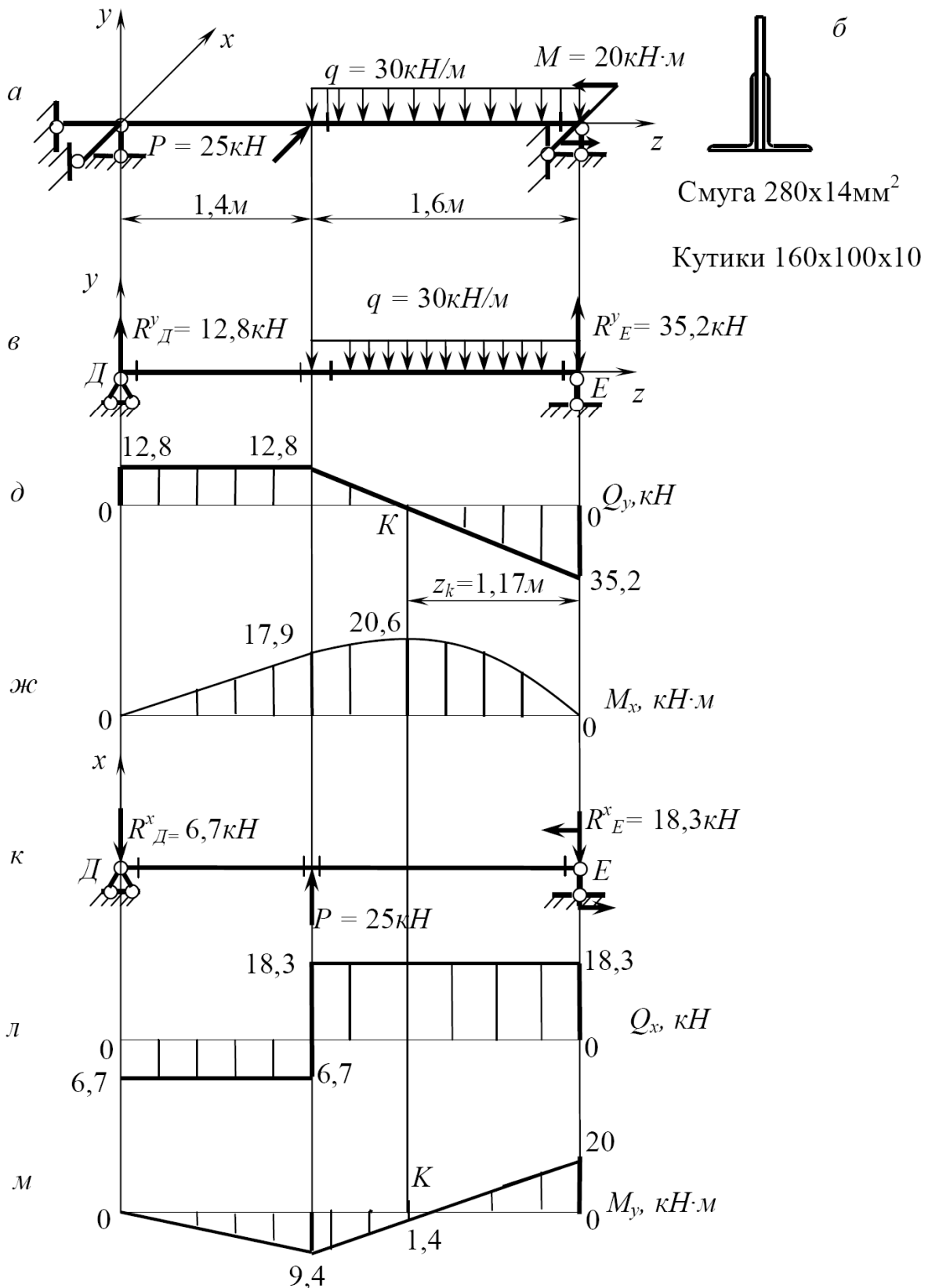
Оскільки епюра Q_y перетинає базу, визначимо положення точки цього перетину:

$$z_k = \frac{Q_4}{q} = \frac{35,2}{30} = 1,17 \text{ м}.$$

$$M_1^x = 0; \quad M_2^x = R_D^Y \cdot 1,4 = 12,8 \cdot 1,4 = 17,9 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3^x = M_2^x = 17,9 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_4^x = 0;$$

$$M_k^x = R_E^Y \cdot 1,17 - q \cdot 1,17 \cdot \frac{1,17}{2} = 35,2 \cdot 1,17 - 30 \cdot 1,17 \cdot \frac{1,17}{2} = 20,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$



$a, б$ – відповідно схема балки і вид її перерізу; $в, к$ – навантаження балки; $д, л$ – епюри поперечних сил; $ж, м$ – епюри згинальних моментів
 Рисунок 4.6 – Графічні побудови до прикладу виконання задачі 4.2

3 Зобразимо схему балки з навантаженням у горизонтальній площині (рис. 4.6, κ) і визначимо її горизонтальні реакції:

$$\sum M_D = 0; \quad P \cdot 1,4 + M - R_E^x \cdot 3 = 0, \quad R_E^x = \frac{25 \cdot 1,4 + 20}{3} = 18,3 \text{ кН}.$$

$$\sum M_E = 0; \quad R_D^x \cdot 3 - P \cdot 1,6 + M = 0, \quad R_D^x = \frac{25 \cdot 1,6 - 20}{3} = 6,7 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum P_x = -R_D^x - R_E^x + P = -6,7 - 18,3 + 25 = -25 + 25 = 0.$$

4 Визначаємо величини поперечних сил і згинальних моментів у горизонтальній площині і будуємо епюри Q_x та M_y (рис. 4.6, л, м):

$$Q_1^x = -R_D^x = -6,7 \text{ кН}; \quad Q_2^x = Q_1^y = -6,7 \text{ кН};$$

$$Q_3^x = Q_4^x = Q_2^x + P = -6,7 + 25 = 18,3 \text{ кН}.$$

$$M_1^y = 0; \quad M_2^y = M_3^y = -R_D^x \cdot 1,4 = -6,7 \cdot 1,4 = -9,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4^y = M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_K^y = M - R_E^x \cdot Z_K = 20 - 18,3 \cdot 1,17 = -1,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5 Аналізуємо епюри M_x і M_y , визначаємо потенційно небезпечні перерізи балки. Таких перерізів три: переріз K , у якому M_x максимальний, переріз 4, у якому M_y максимальний, також переріз 2 (або 3), в якому значення M_x та M_y хоча і не максимальні, але одночасно достатньо великі.

Надамо знаки величинам M_x та M_y у зазначених перерізах.

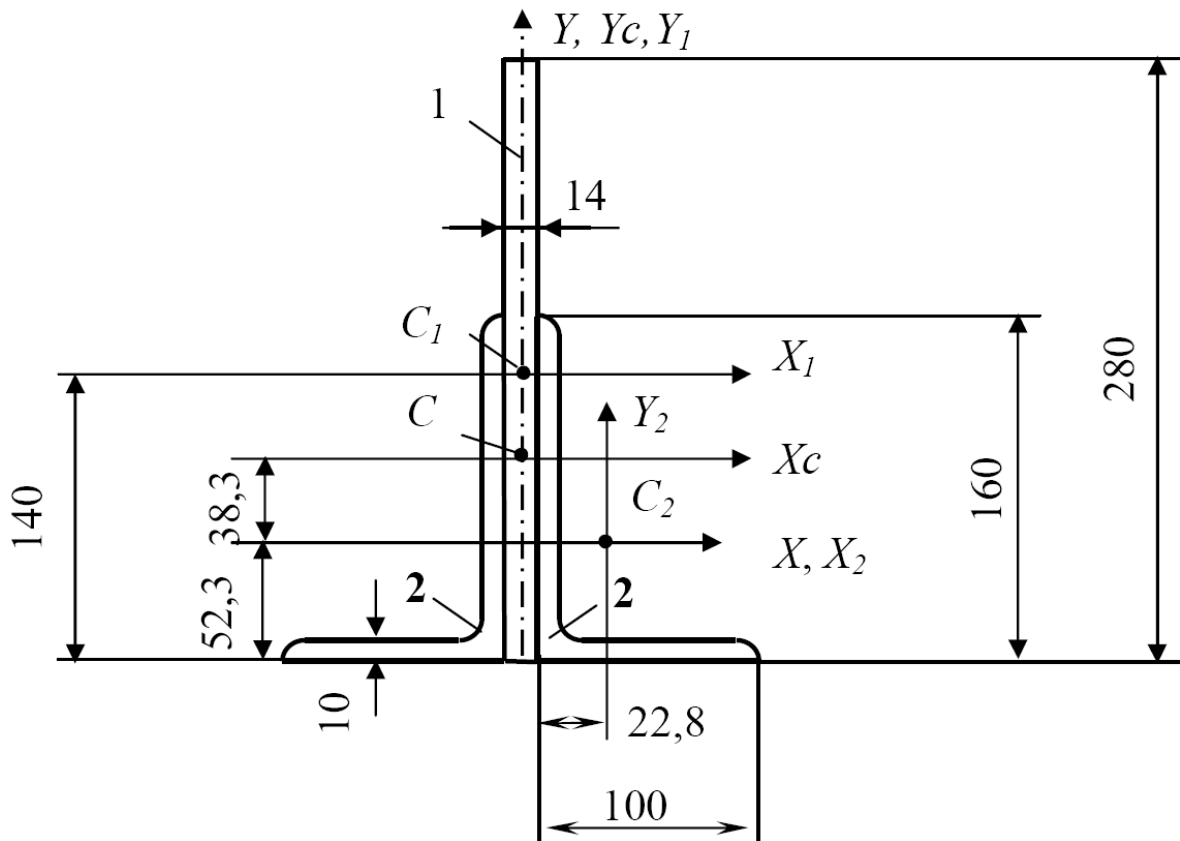
У перерізі K згинальний момент M_x стискає волокна у верхній частині перерізу (яка лежить вище від осі X_c), а розтягує у нижній, тому вважаємо його від'ємним.

Згинальний момент M_y у цьому перерізі стискає волокна у лівій (лівише від осі U_c) частині перерізу, а розтягує у правій, тому будемо вважати його додатним. У перерізі K : $M_x = -20,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_y = 1,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Аналогічно в перерізі 4 маємо: $M_x = 0$; $M_y = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}$, у перерізі 2 (або 3): $M_x = -17,9 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_y = 9,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

6 Зображуємо в масштабі переріз балки (рис. 4.7) і визначаємо положення його центра ваги. Необхідні дані беремо з сортаменту.

$X_c = 0$, тому що переріз симетричний;



1 – смуга 280x14 мм²; 2 – кутики 160x100x10
 Рисунок 4.7 – Схема до визначення центра ваги перерізу та його головних моментів інерції

$$Y_C = \frac{Y_1 \cdot F_1 + 2 \cdot Y_2 \cdot F_2}{F_1 + 2F_2} = \frac{87,7 \cdot 3920}{3920 + 2 \cdot 2530} = 38,3 \text{ мм.}$$

$$Y_1 = 140 - 52,3 = 87,7 \text{ мм} ; Y_2 = 0 ;$$

$$F_1 = 280 \times 14 = 3920 \text{ мм}^2 ; F_2 = 25,3 \text{ см}^2 = 2530 \text{ мм}^2 .$$

7 Визначаємо головні моменти інерції перерізу:

$$\begin{aligned} I_{X_C} &= I_{X_1} + F_1(Y_1 - Y_C)^2 + 2[I_{X_2} + F_2(Y_C - Y_2)^2] = \\ &= \frac{1}{12} \cdot 14 \cdot 280^3 + 3920 \cdot (87,7 - 38,3)^2 + \\ &+ 2 \cdot [667 \times 10^4 + 2530 \cdot (38,3 - 0)^2] = 5594 \times 10^4 \text{ мм}^4 ; \\ I_{Y_C} &= I_{Y_1} + 2[I_{Y_2} + F_2(X_2)^2] = \frac{1}{12} \cdot 280 \cdot 14^2 + \\ &+ 2 \cdot \left[204 \times 10^4 + 2530 \cdot \left(22,8 + \frac{14}{2} \right)^2 \right] = 864 \times 10^4 \text{ мм}^4 ; \end{aligned}$$

8 Визначимо положення нейтральної лінії (н. л.) в кожному з потенційно небезпечних перерізів (рис. 4.8).

Переріз 2:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_{X_C}}{I_{Y_C}} = -\frac{9,4}{(-17,9)} \cdot \frac{5594}{864} = 3,400; \quad \beta = +73,61^\circ.$$

Переріз *K*:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_{X_C}}{I_{Y_C}} = -\frac{14}{(-20,6)} \cdot \frac{5594}{864} = 0,440; \quad \beta = +23,75^\circ.$$

Переріз 4:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_{X_C}}{I_{Y_C}} = -\frac{(-20)}{0} \cdot \frac{5594}{864} = +\infty; \quad \beta = +90^\circ.$$

9 Визначимо координати точок *A* і *B* у кожному з потенційно небезпечних перерізів (див. рис. 4.7, 4.8).

Переріз 2:

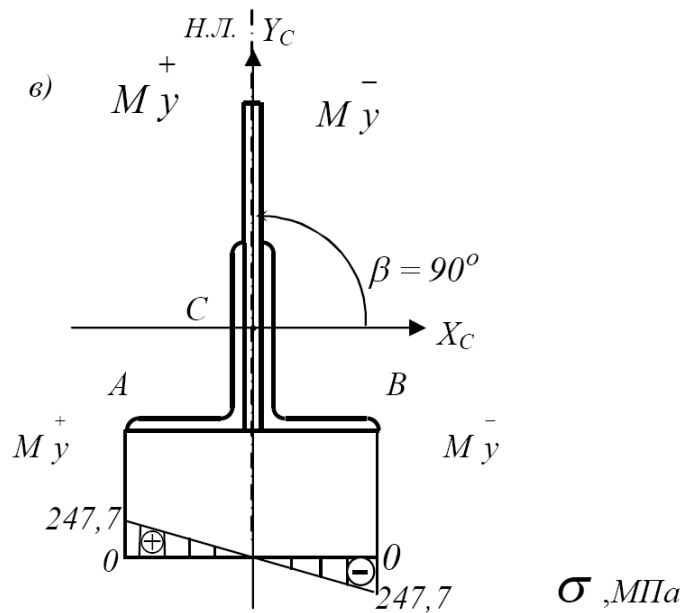
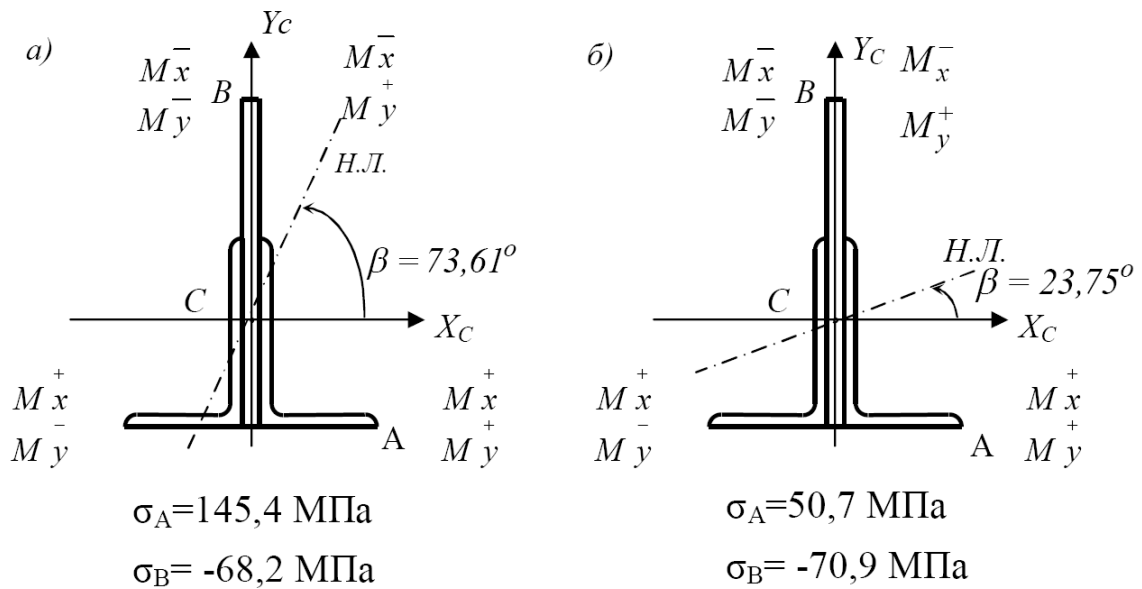
$$\begin{aligned} X_A &= \frac{14}{2} + 100 = 107 \text{ мм}; \\ Y_A &= -(52,3 + 38,3) = -90,6 \text{ мм}; \\ X_B &= -\frac{14}{2} = -7 \text{ мм}; \\ Y_B &= 280 - (52,3 + 38,3) = 189,4 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Переріз *K*:

$$\begin{aligned} X_A &= 107 \text{ мм}; Y_A = -90,6 \text{ мм}; \\ X_B &= -7 \text{ мм}; Y_B = 189,4 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Переріз 4:

$$\begin{aligned} X_A &= -107 \text{ мм}; Y_A = -90,6 \text{ мм}; \\ X_B &= 107 \text{ мм}; Y_B = -90,6 \text{ мм}. \end{aligned}$$



а – переріз 2; б – переріз К; в – переріз 4
 Рисунок 4.8 – Схема до визначення напружень в небезпечних перерізах балки

10 Визначимо напруження в точках A і B кожного з потенційно небезпечних перерізів (див. рис. 4.8).

Переріз 2:

$$\begin{aligned}\sigma_A &= \frac{M_x}{I_x} \cdot Y_A + \frac{M_y}{I_y} \cdot X_A = \frac{-17,9 \cdot 10^6}{5594 \cdot 10^4} \cdot (-90,6) + \\ &+ \frac{9,4 \cdot 10^6}{864 \cdot 10^4} \cdot 107 = 145,4 \text{ МПа}; \\ \sigma_B &= \frac{M_x}{I_x} \cdot Y_B + \frac{M_y}{I_y} \cdot X_B = \frac{-17,9 \cdot 10^6}{5594 \cdot 10^4} \cdot 189,4 + \\ &+ \frac{9,4 \cdot 10^6}{864 \cdot 10^4} \cdot (-7) = -68,2 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Переріз К:

$$\begin{aligned}\sigma_A &= \frac{M_x}{I_x} \cdot Y_A + \frac{M_y}{I_y} \cdot X_A = \frac{-20,6 \cdot 10^6}{5594 \cdot 10^4} \cdot (-90,6) + \\ &+ \frac{1,4 \cdot 10^6}{864 \cdot 10^4} \cdot 107 = 50,7 \text{ МПа}; \\ \sigma_B &= \frac{M_x}{I_x} \cdot Y_B + \frac{M_y}{I_y} \cdot X_B = \frac{-20,6 \cdot 10^6}{5594 \cdot 10^4} \cdot 189,4 + \\ &+ \frac{1,4 \cdot 10^6}{864 \cdot 10^4} \cdot (-7) = -70,9 \text{ МПа};\end{aligned}$$

Переріз 4:

$$\begin{aligned}\sigma_A &= \frac{M_x}{I_x} \cdot Y_A + \frac{M_y}{I_y} \cdot X_A = 0 + \frac{(-20) \times 10^6}{864 \times 10^4} \cdot (-107) = 247,7 \text{ МПа}; \\ \sigma_B &= \frac{M_x}{I_x} \cdot Y_B + \frac{M_y}{I_y} \cdot X_B = 0 + \frac{(-20) \times 10^6}{864 \times 10^4} \cdot 107 = -247,7 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

11 Аналізуючи величини визначених напружень, бачимо, що найбільш навантаженим (тобто небезпечним) є переріз 4. Саме в ньому діють найбільші напруження у балці: $|\sigma_{max}| = 247,7 \text{ МПа}$.

12 Будуємо епюру напружень у небезпечному перерізі (див. рис. 4.8, в).

4.3 Позацентрове розтягання і стискання

Визначити максимально допустиму силу, що стискає стрижень. Координати точки прикладення сили (P)- X_P та Y_P . Допустиме напруження $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$. Побудувати також епюру напружень у перерізі стрижня від максимально допустимої сили.

Вихідні дані вибрати із таблиць 4.5 та 4.6 і рисунка 4.9.

Таблиця 4.5 – Вихідні дані до задачі 4.3

Величина		Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Розмір, см	X_P	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	-2,0	-3,0	-4,0	-5,0	-6,0
	a	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	5,5	5,0	4,5	4,0	6,0
	c	8,0	7,0	6,0	5,0	4,0	8,5	7,5	6,5	5,5	4,5
Номер двотавра		10	12	14	16	18	10	12	14	16	18
Розміри смуги, см		14 x 1,2	16 x 1,4	18 x 1,6	20 x 1,8	22 x 2,0	14 x 2,0	16 x 1,8	18 x 1,4	20 x 1,6	22 x 1,2

Таблиця 4.6 – Вихідні дані до задачі 4.3

Величина		Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Розмір, см	Y_P	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0
	b	5,0	6,0	7,0	8,0	4,0	5,5	4,5	6,5	7,5	8,5
	d	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0
Номер швелера		18	16	14	12	10	18	16	14	12	10
Розміри кутика, мм		100 x 63x8	50 x 32 x 4	63 x 40 x 6	75 x 50 x 8	80 x 60 x 6	100 x 63 x 10	50 x 32 x 3	63 x 40 x 4	75 x 50 x 7	80 x 60 x 7

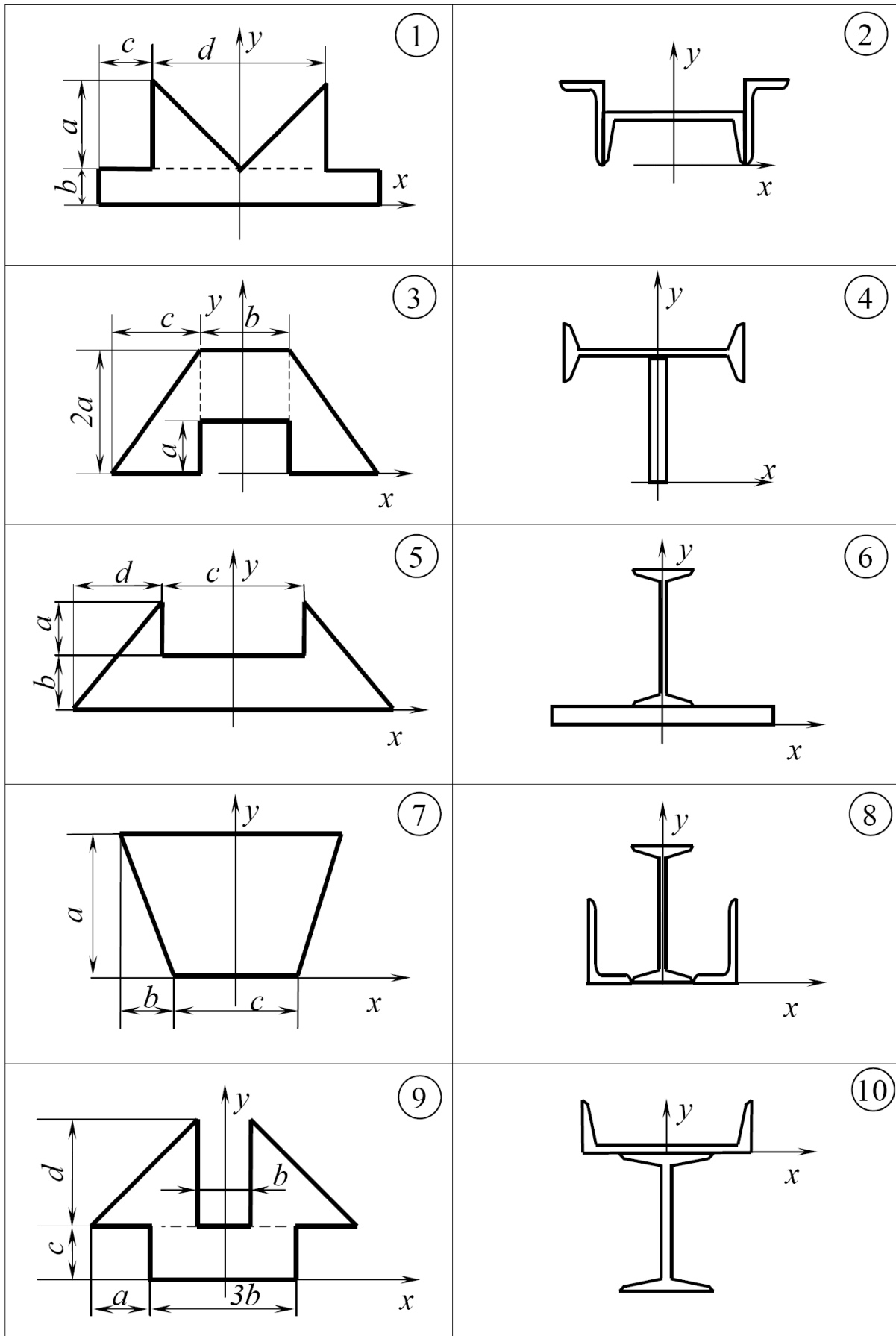


Рисунок 4.9

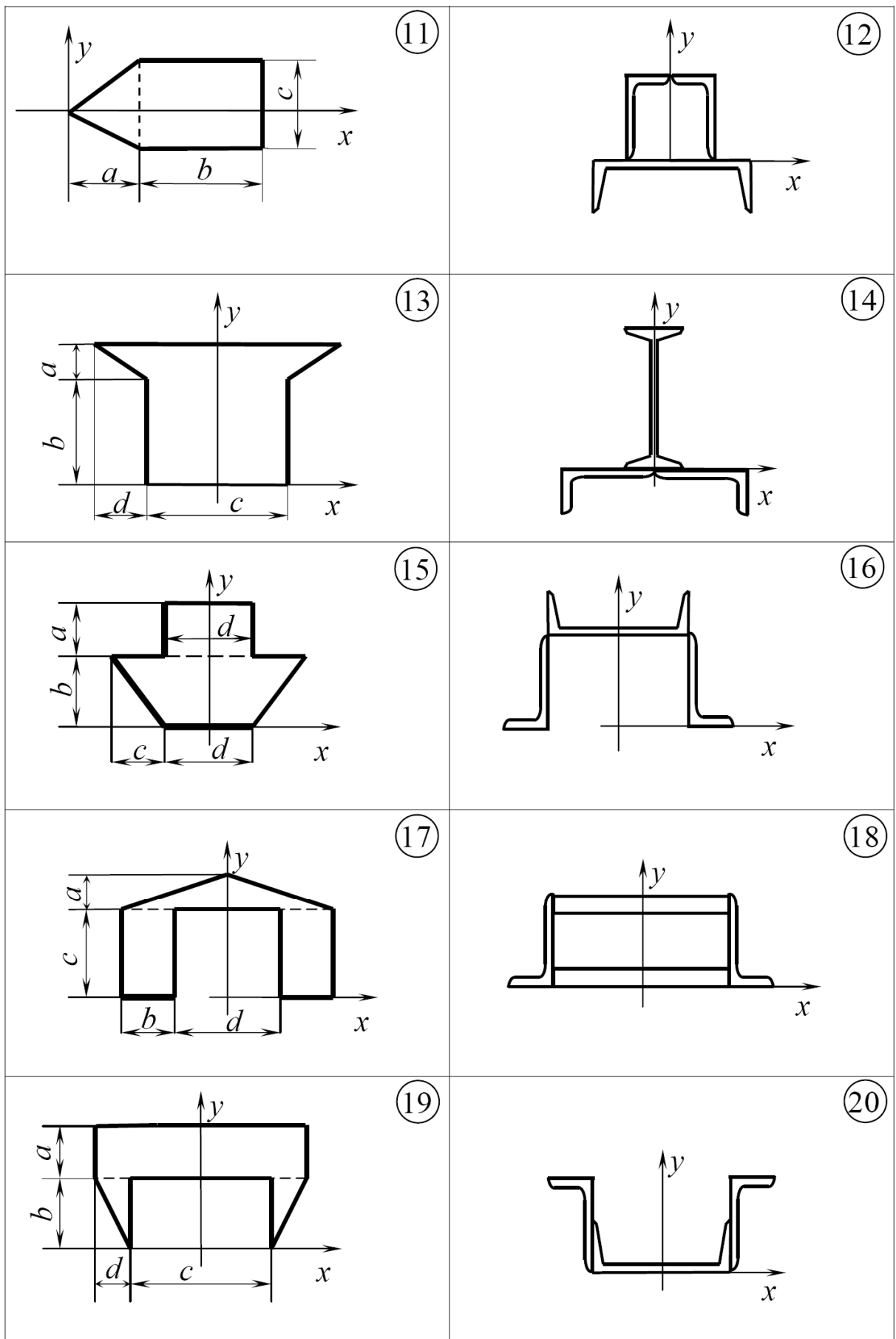


Рисунок 4.9, аркуш 2

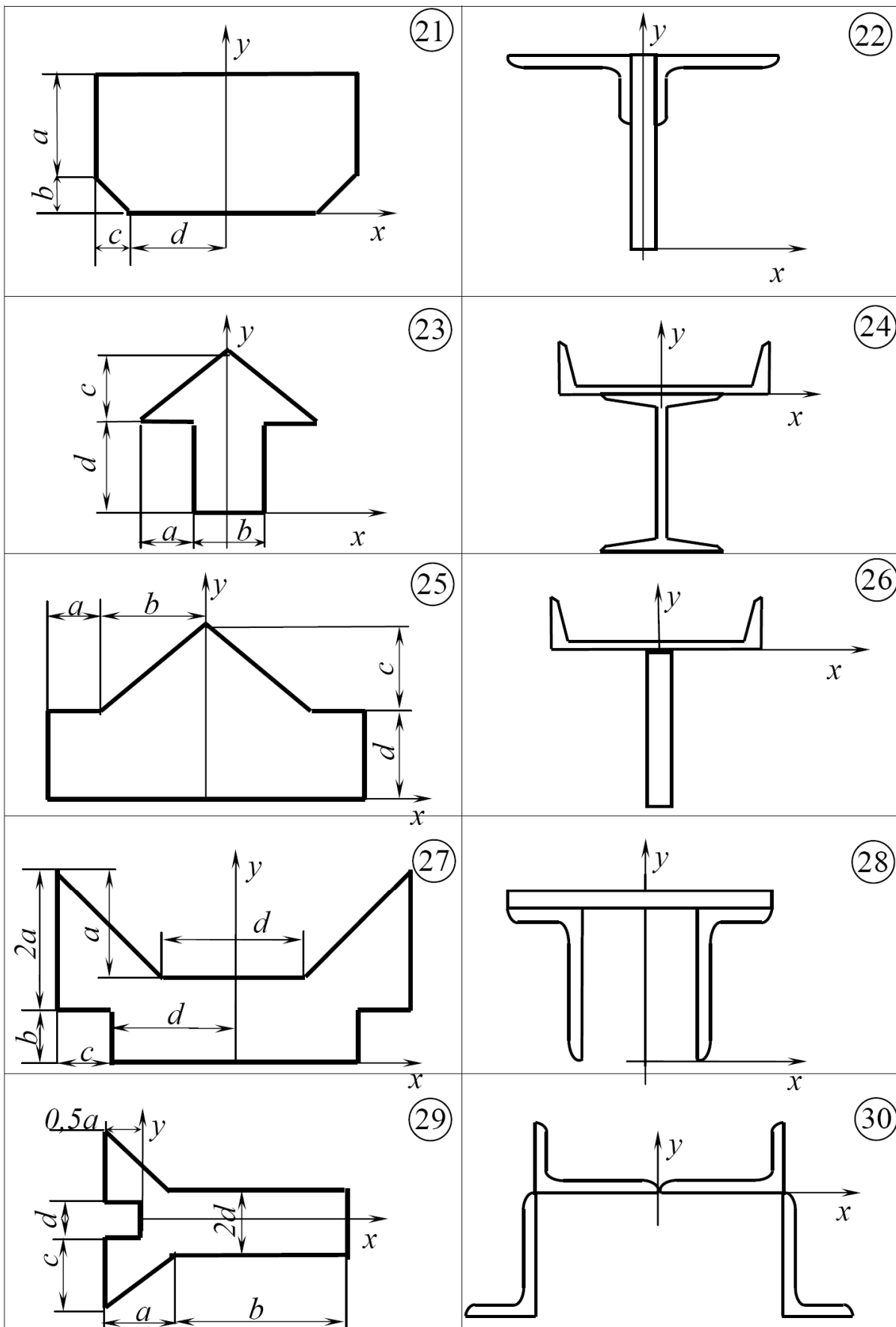


Рисунок 4.9, аркуш 3

4.3.1 Методичні вказівки до виконання задачі 4.3

Розв'язання задачі здійснюється у такій послідовності:

1 Зображується в певному масштабі переріз стрижня і визначається положення його центра ваги.

2 Визначаються моменти інерції перерізу відносно його головних центральних осей I_{Xc} та I_{Yc} .

3 Визначаються координати точки P прикладення стискної сили в системі головних центральних осей:

$$X'_P = X_P - X_c \quad (4.14)$$

$$Y'_P = Y_P - Y_c \quad (4.15)$$

де X_P та Y_P – координати зазначеної точки в системі координат, що зображена на схемі перерізу (рис. 4.9);

X_c та Y_c – координати центра ваги перерізу в цій системі координат.

4 На схемі перерізу зображується його нейтральна лінія і визначаються координати (в системі головних центральних осей) найбільше віддаленої від неї точки в зоні стискання – X_A та Y_A .

Для побудови нейтральної лінії визначаються координати точок її перетину з осями X_c та Y_c :

$$X = 0; \quad Y = -I_{Xc} / F \cdot Y'_P; \quad (4.16)$$

$$Y = 0; \quad X = -I_{Yc} / F \cdot X'_P, \quad (4.17)$$

де F – площа перерізу стрижня.

5 Визначається модуль максимально допустимої стискної сили:

$$P_{max} = \frac{[\sigma]}{\frac{1}{F} + \frac{X'_P \cdot X_A}{I_{Yc}} + \frac{Y'_P \cdot Y_A}{I_{Xc}}} \quad (4.18)$$

6 Для побудови епюри напружень у перерізі стрижня визначаються координати другої особливої його точки (B) – X_B та Y_B . Якщо нейтральна лінія перетинає переріз, то ця точка лежить в зоні розтягання на максимальній відстані від нейтральної лінії. Коли ж нейтральна лінія про-

ходить поза межами перерізу, точка B – це найближча до неї точка в зоні стискання.

7 Підраховуються напруження в точках A і B перерізу від дії стискної сили P_{max} :

$$\sigma_A = -P_{max} \cdot \left(\frac{1}{F} + \frac{X'_P \cdot X_A}{I_{Yc}} + \frac{Y'_P \cdot Y_A}{I_{Xc}} \right), \quad (4.19)$$

$$\sigma_B = -P_{max} \cdot \left(\frac{1}{F} + \frac{X'_P \cdot X_B}{I_{Yc}} + \frac{Y'_P \cdot Y_B}{I_{Xc}} \right). \quad (4.20)$$

8 Будується епюра напружень у перерізі стрижня. Для цього поза межами перерізу проводиться база епюри під прямим кутом до нейтральної лінії. До бази проводяться лінії з точок A і B паралельно нейтральній лінії. Від бази уздовж цих ліній відкладаються у певному масштабі і з урахуванням знаків величини σ_A та σ_B , після цього кінці відповідних відрізків з'єднуються прямою лінією.

4.3.2 Приклад розв'язання задачі 4.3

Схема перерізу стрижня зображена на рисунку 4.10, координати точки P прикладення стискуючої сили: $X_P = 1\text{см}$, $Y_P = 2\text{см}$.

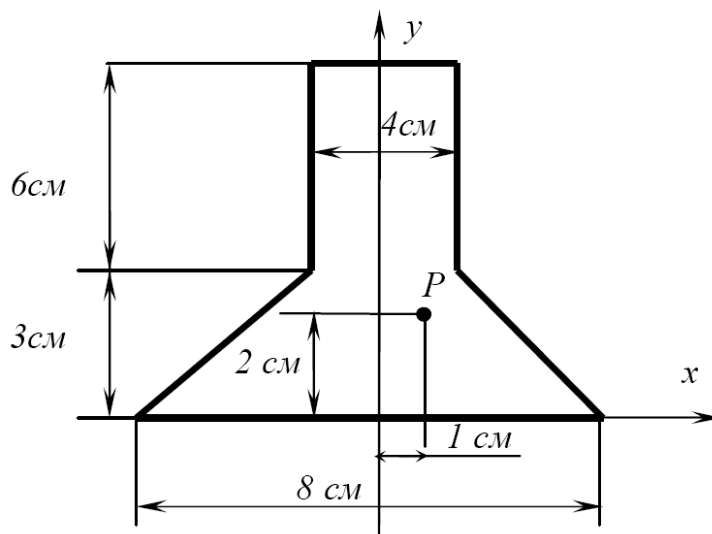


Рисунок 4.10 – Схема перерізу стрижня

1 Визначаємо положення центра ваги перерізу (рис. 4.11):

$X_C = 0$ (тому що переріз є симетричним відносно осі Y);

$$Y_C = \frac{Y_1 \cdot F_1 + 2Y_2 \cdot F_2}{F_1 + 2F_2},$$

де $Y_1 = 0,5 \cdot 9 = 4,5 \text{ см}$ – ордината центра ваги прямокутника (точки C_1);

$F_1 = 4 \cdot 9 = 36 \text{ см}^2$ – площа прямокутника;

$Y_2 = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \text{ см}$ – ордината центра ваги трикутника (точки C_2);

$F_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3 \text{ см}^2$ – площа кожного з двох трикутників;

$$Y_C = \frac{4,5 \cdot 36 + 2 \cdot 1 \cdot 3}{36 + 2 \cdot 3} = \frac{168}{42} = 4 \text{ см.}$$

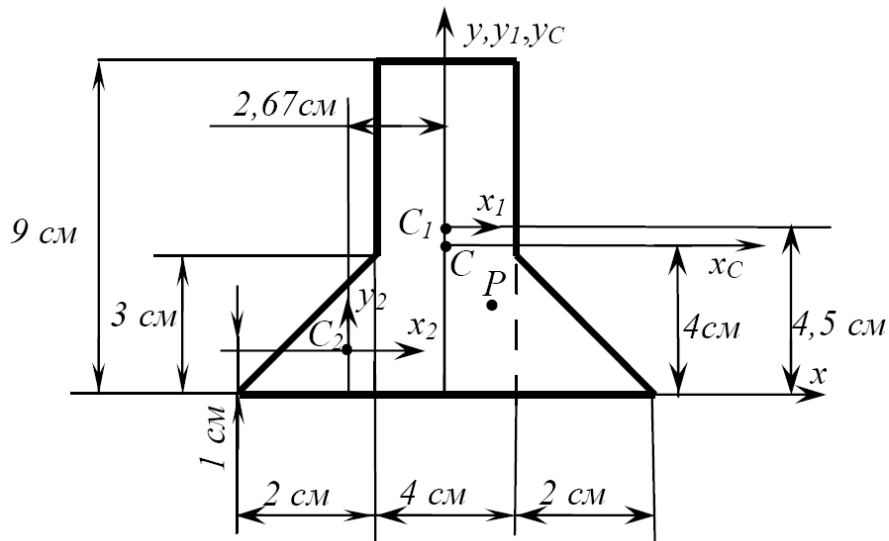


Рисунок 4.11 – Схема до визначення центра ваги перерізу та його головних моментів інерції

2 Визначаємо головні моменти інерції перерізу (див. рис. 4.11):

$$\begin{aligned} I_{x_c} &= I_{x_1} + F_1 \cdot (Y_1 + Y_C)^2 + 2 \cdot [I_{x_2} + F_2 \cdot (Y_C - Y_2)^2] = \\ &= \frac{1}{12} \cdot 4 \cdot 9^3 + 36 \cdot (4,5 - 4)^2 + 2 \cdot \left[\frac{1}{36} \cdot 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot (4 - 1)^2 \right] = 309 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$I_{y_c} = I_{y_1} + 2 \cdot [I_{y_2} + F_2 \cdot (X_2)^2] =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot 4 \cdot 9^3 + 2 \cdot \left[\frac{1}{36} \cdot 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot (-2,67)^2 \right] = 92 \text{ см}^4.$$

3 Визначаємо координати точки P прикладення стискної сили в системі головних центральних осей перерізу – X_C, Y_C :

$$X'_P = X_P - X_C = 1 - 0 = 1 \text{ см};$$

$$Y'_P = Y_P - Y_C = 2 - 4 = -2 \text{ см}.$$

4 Визначаємо координати точок O_1 і O_2 перетину нейтральної лінії з вісями X_c і Y_c та зображуємо її на схемі перерізу (рис. 4.12):

$$X = 0; \quad Y = -\frac{I_{x_c}}{F \cdot Y'_P} = -\frac{309}{42 \cdot (-2)} = 3,69 \text{ см};$$

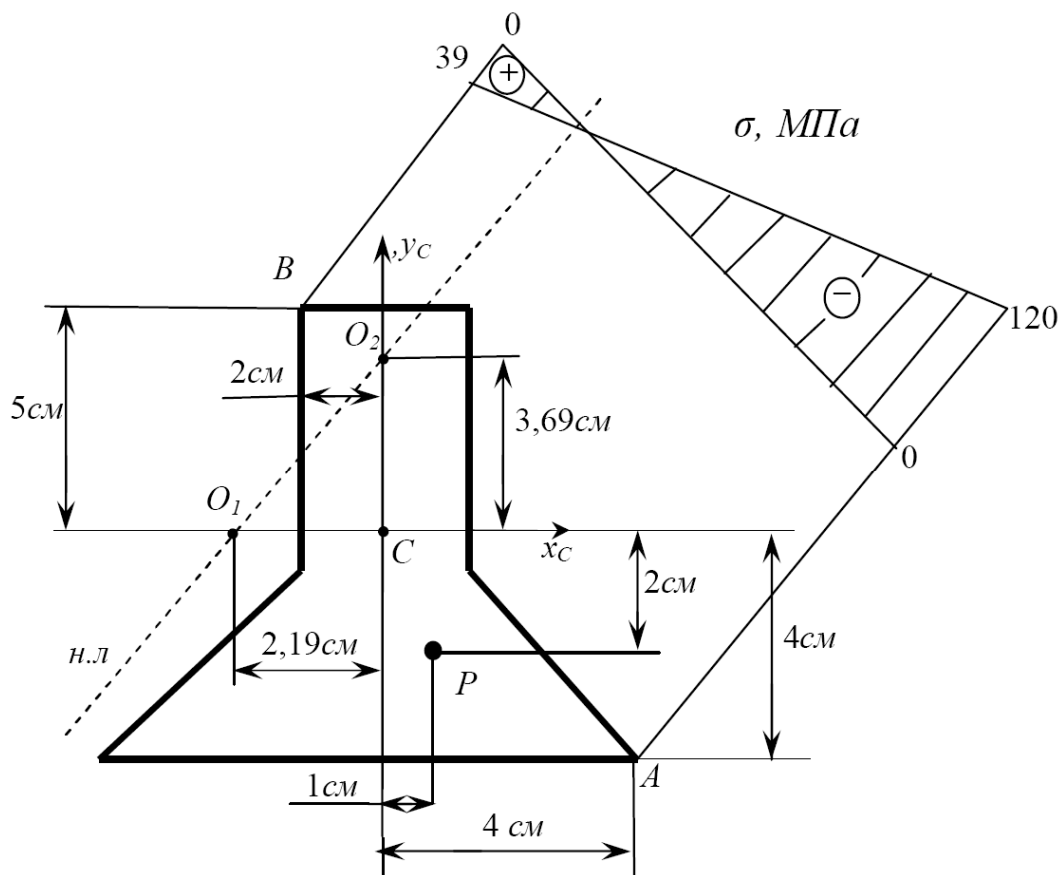


Рисунок 4.12 – Положення нейтральної лінії (н. л.) та еюра напружень у перерізі стрижня

$$Y = 0; \quad X = -\frac{I_{yc}}{F \cdot X'_p} = -\frac{92}{42 \cdot 1} = -2,19 \text{ см.}$$

Тут $F = F_1 + 2 \cdot F_2 = 36 + 2 \cdot 3 = 42 \text{ см}^2$ – площа всього перерізу.

З наведеного рисунку бачимо, що координати найбільше віддаленої від нейтральної лінії точки в зоні стискання (A) дорівнюють: $X_A = 4 \text{ см}$; $Y_A = -4 \text{ см}$.

5 Визначаємо модуль максимально допустимої стискної сили:

$$P_{max} = \frac{[\sigma]}{\frac{1}{F} + \frac{X'_p \cdot X_A}{I_{yc}} + \frac{Y'_p \cdot Y_A}{I_{xc}}} = \frac{120}{\frac{1}{42 \times 10^2} + \frac{1 \cdot 4 \times 10^2}{92 \times 10^4} + \frac{(-2) \cdot (-4) \times 10^2}{309 \times 10^4}} =$$

$$= \frac{120 \times 10^2}{\frac{1}{42} + \frac{4}{92} + \frac{8}{309}} = 128786 \text{ Н} = 128,786 \text{ кН.}$$

6 Визначаємо координати точки B (див. рис. 4.12), яка є найбільше віддаленою від нейтральної лінії у зоні розтягання:

$$X_B = -2 \text{ см}, \quad Y_B = 5 \text{ см.}$$

7 Підраховуємо напруження в точках A і B від дії стискуючої сили P_{max} :

$$\sigma_A = -P_{max} \cdot \left(\frac{1}{F} + \frac{X'_p \cdot X_A}{I_{yc}} + \frac{Y'_p \cdot Y_A}{I_{xc}} \right) =$$

$$= -128786 \times 10^3 \cdot \left(\frac{1}{42} + \frac{4}{92} + \frac{8}{309} \right) = -120 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_B = -P_{max} \cdot \left(\frac{1}{F} + \frac{X'_p \cdot X_B}{I_{yc}} + \frac{Y'_p \cdot Y_B}{I_{xc}} \right) =$$

$$= -128786 \cdot \left(\frac{1}{42 \times 10^2} + \frac{1 \cdot (-2) \times 10^2}{92 \times 10^4} \right) + \frac{(-2) \cdot 5 \times 10^2}{309 \times 10^4} = 39 \text{ МПа.}$$

8 За результатами розрахунків будуюмо епюру напружень у перерізі стрижня (див. рис. 4.12).

4.4 Згинання з крученням

Нехтуючи поздовжньою силою і виходячи з третьої теорії міцності, визначити діаметр вала редуктора, схема якого зображена на рисунку 4.13. Потужність, що передається валом, – K , частота його обертання – n , діаметри зубчатих коліс – d_1 , та d_2 . Співвідношення між силами, що діють на зубчаті колеса: $T_i = 0,4P_i$; $S_i = 0,2P_i$. Допустиме напруження $[\sigma] = 80 \text{ МПа}$.

Вихідні дані вибрати з таблиць 4.7 та 4.8 і рисунка 4.13.

Таблиця 4.7 – Вихідні дані до задачі 4.4

Величина	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n , об/хв.	200	400	250	350	300	400	200	350	250	300
a , м	0,10	0,30	0,15	0,25	0,20	0,15	0,30	0,20	0,25	0,10
b , м	0,20	0,15	0,25	0,10	0,30	0,20	0,10	0,25	0,30	0,15
c , м	0,30	0,20	0,10	0,15	0,10	0,25	0,25	0,15	0,20	0,30

Таблиця 4.8 – Вихідні дані до задачі 4.4

Величина	Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
K , кВт	30	50	35	45	40	50	30	45	35	40
d_1 , м	0,20	0,40	0,25	0,35	0,30	0,25	0,35	0,40	0,30	0,20
d_2 , м	0,35	0,20	0,40	0,25	0,40	0,35	0,20	0,30	0,25	0,30

4.4.1 Методичні вказівки до виконання задачі 4.4

Розв'язання задачі здійснюється в такій послідовності:

1 Визначаються крутний момент та сили, що діють на зубчаті колеса вала:

$$M_{кр} = \frac{30 \cdot K}{\pi \cdot n}; \quad (4.21)$$

$$P_i = \frac{2 \cdot M_{кр}}{d_i}; \quad (4.22)$$

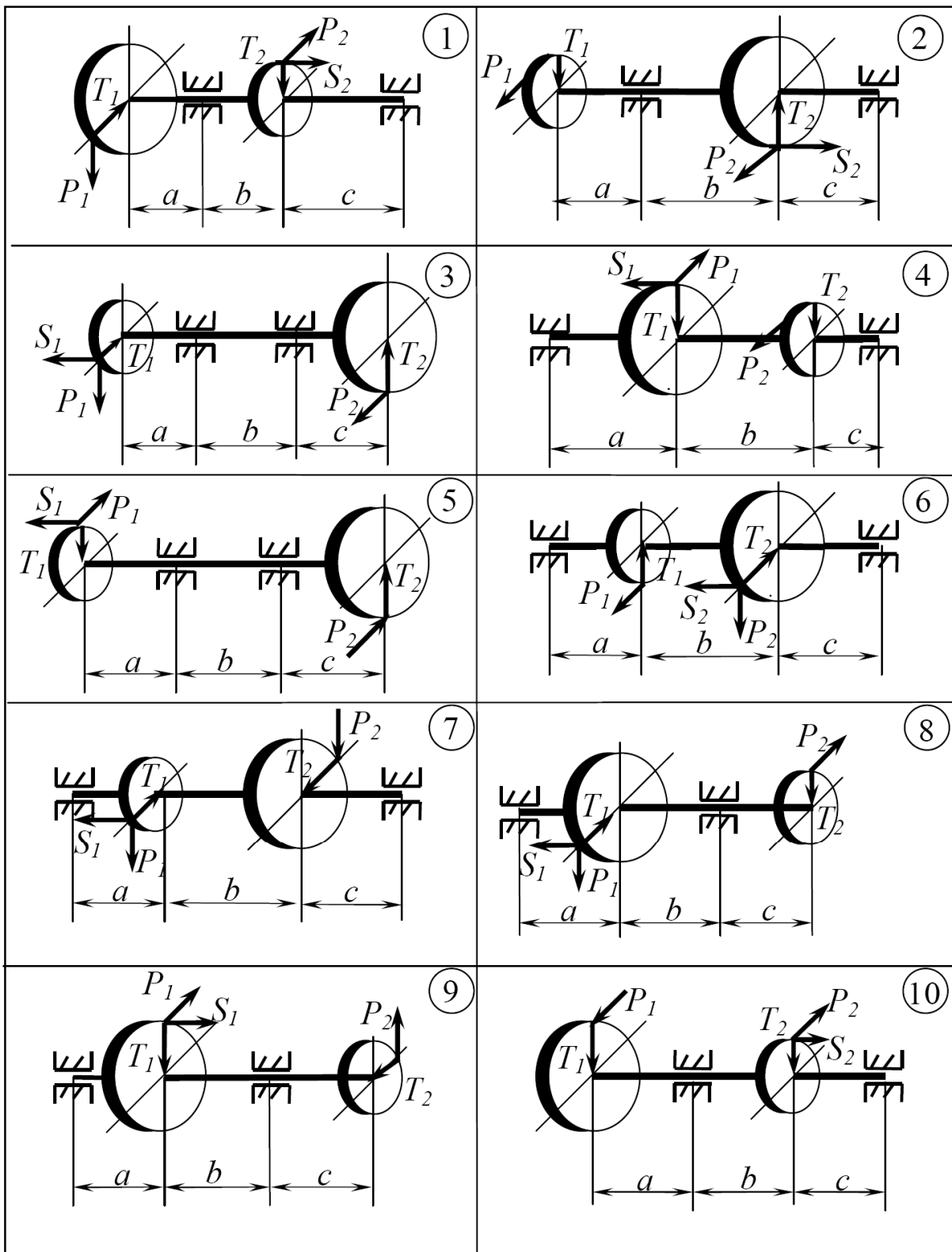


Рисунок 4.13

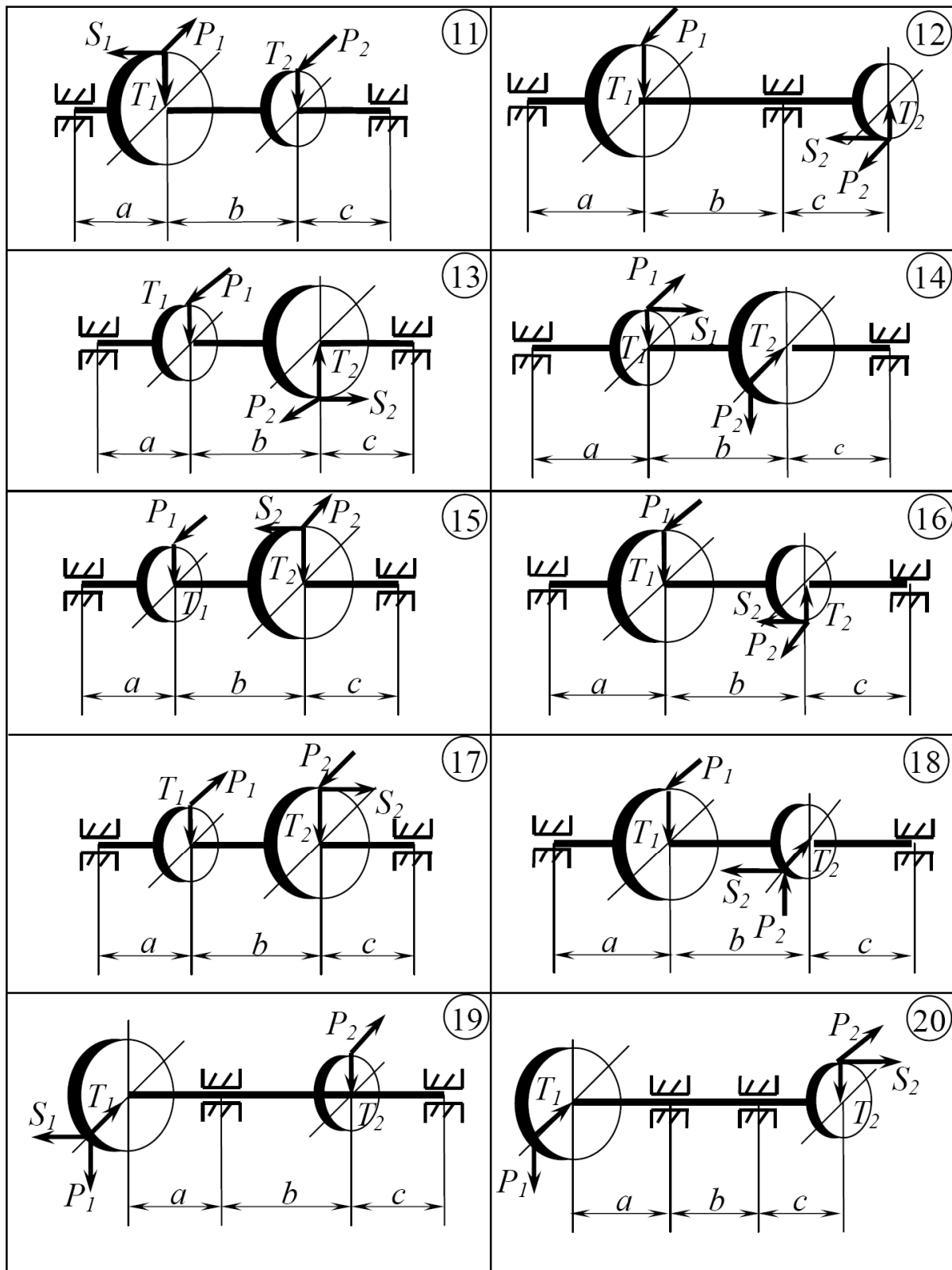


Рисунок 4.13, аркуш 2

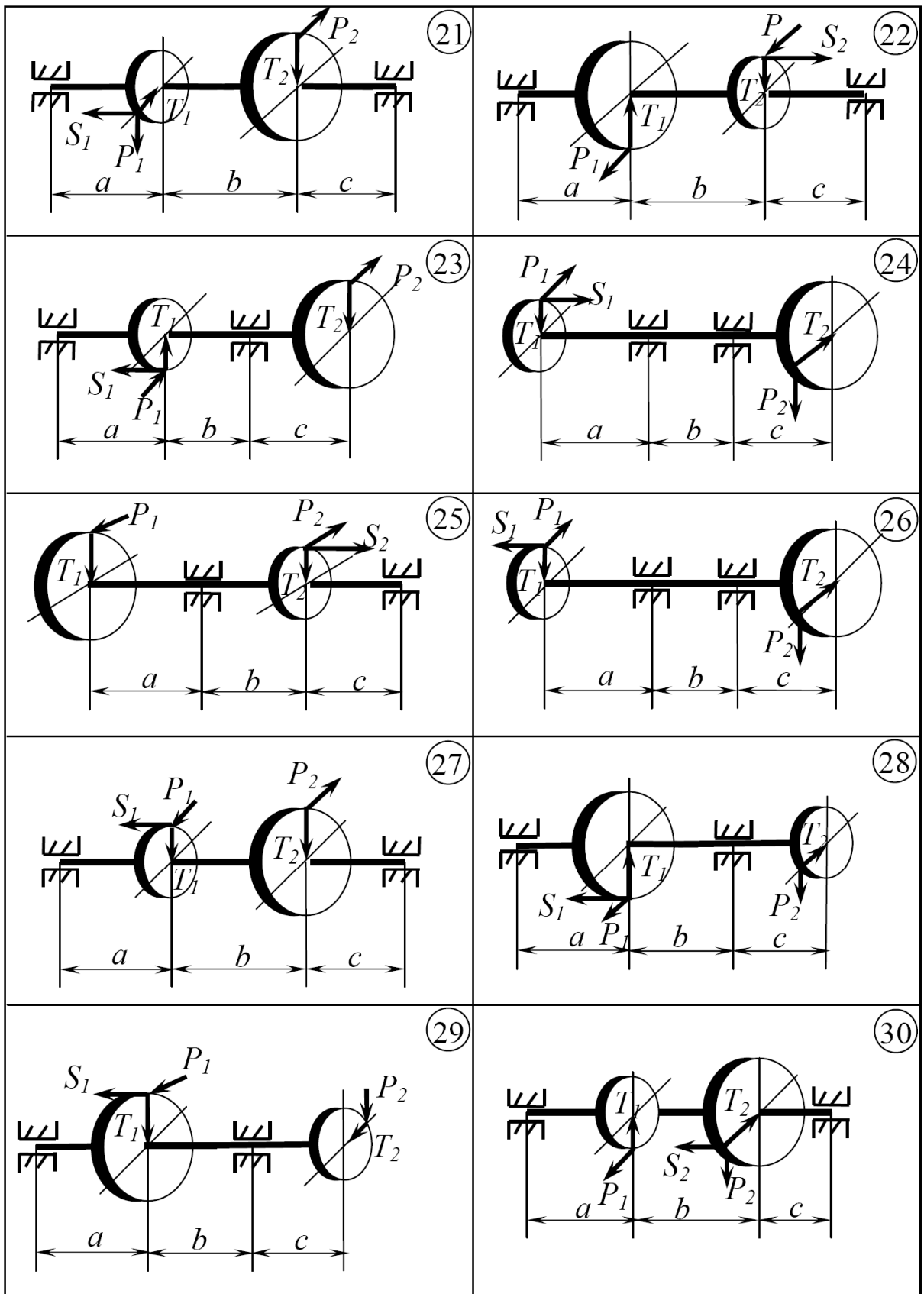


Рисунок 4.13, аркуш 3

$$T_i = 0,4P_i, \quad (4.23)$$

$$S_i = 0,2P_i. \quad (4.24)$$

2 Усі зазначені сили прикладаються безпосередньо до вала з додаванням відповідних моментів, які виникають, коли лінія дії сили не перетинає осі вала.

3 Визначаються опорні реакції вала у вертикальній площині та будується еюра згинальних моментів M_x .

4 Визначаються опорні реакції вала у горизонтальній площині, та будується еюра згинальних моментів M_y .

5 Будується еюра крутних моментів – $M_{кр}$.

6 Визначаються величини приведених моментів у характерних перерізах вала:

$$M_{пр} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{кр}^2} \quad (4.25)$$

і будується їх еюра.

7 За епюрою приведених моментів визначається найбільше їх значення – $M_{пр}^{max}$.

8 Визначається необхідний діаметр вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{пр}^{max}}{\pi \cdot n}}. \quad (4.26)$$

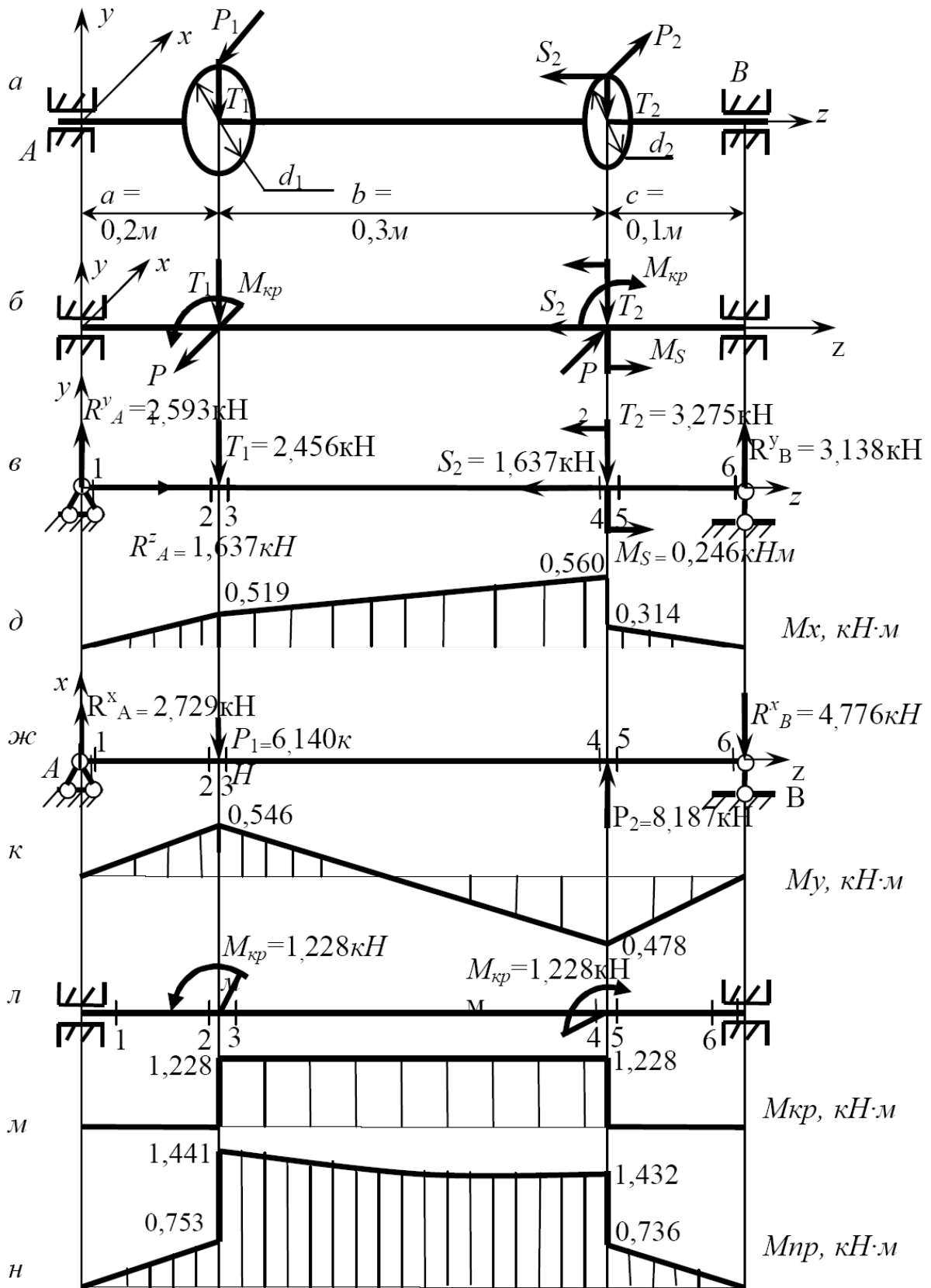
Остаточне значення d береться з нормального ряду (ГОСТ 6636-69).

4.4.2 Приклад розв'язання задачі 4.4

Схема вала зображена на рисунку 4.14, а. Розрахунки виконаємо відповідно до таких вихідних даних: $a = 0,2$ м; $b = 0,3$ м; $c = 0,1$ м; $d_1 = 0,4$ м; $d_2 = 0,3$ м; $K = 45$ кВт; $n = 350$ об/хв.; $[\sigma] = 80$ МПа.

1 Визначимо крутний момент та сили, що діють на зубчаті колеса вала:

$$M_{кр} = \frac{30 \cdot K}{\pi \cdot n} = \frac{30 \cdot 45}{3,14 \cdot 350} = 1,228 \text{ кН} \cdot \text{м};$$



а – схема вала; б – приведення сил до осі вала; в – навантаження вала у вертикальній площині; д – епюра M_x ; ж – навантаження вала у горизонтальній площині; к – епюра M_y ; л – схема дії крутних моментів; м – епюра $M_{кр}$; н – епюра $M_{пр}$.

Рисунок 4.14 – Графічні побудови до прикладу розв'язання задачі 4.4

$$P_1 = \frac{2 \cdot M_{кр}}{d_1} = \frac{2 \cdot 1,228}{0,4} = 6,140 \text{ кН};$$

$$T_1 = 0,4 \cdot P_1 = 0,4 \cdot 6,140 = 2,456 \text{ кН};$$

$$P_2 = \frac{2 \cdot M_{кр}}{d_2} = \frac{2 \cdot 1,228}{0,3} = 8,187 \text{ кН};$$

$$T_2 = 0,4 \cdot P_2 = 0,4 \cdot 8,187 = 3,275 \text{ кН};$$

$$S_2 = 0,2 \cdot P_2 = 0,2 \cdot 8,187 = 1,637 \text{ кН}.$$

2 Прикладаємо усі зазначені сили безпосередньо до осі вала (рис. 4.14, б).

Зважаючи на те, що сили P_1 та P_2 не перетинають осі вала, до них додають добутки $P_1 \cdot \frac{d_1}{2}$ та $P_2 \cdot \frac{d_2}{2}$, які дорівнюють крутному моменту – $M_{кр}$. З тієї ж причини до сили S_2 додається згинальний момент

$$M_S = S_2 \cdot \frac{d_2}{2} = 1,637 \cdot \frac{0,3}{2} = 0,246 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

3 Визначаємо опорні реакції вала у вертикальній площині (рис. 4.14, в) та будуємо епюру згинальних моментів M_x (рис. 4.14, д):

$$\sum M_A = 0: \quad R_B^y \cdot 0,6 + M_S - T_1 \cdot 0,2 - T_2 \cdot 0,5 = 0;$$

$$R_B^y = \frac{1}{0,6} \cdot (-M_S + T_1 \cdot 0,2 + T_2 \cdot 0,5) =$$

$$= \frac{1}{0,6} \cdot (-0,246 + 2,456 \cdot 0,2 + 3,275 \cdot 0,5) = 3,138 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: \quad -R_A^y \cdot 0,6 + M_S + T_1 \cdot 0,4 + T_2 \cdot 0,1 = 0;$$

$$R_A^y = \frac{1}{0,6} \cdot (T_1 \cdot 0,4 + M_S + T_2 \cdot 0,1) =$$

$$= \frac{1}{0,6} \cdot (2,456 \cdot 0,4 + 0,246 + 3,275 \cdot 0,1) = 2,593 \text{ кН};$$

$$\sum P_z = 0: \quad R_A^z - S_2 = 0; \quad R_A^z = S_2 = 1,637 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum P_y = R_A^y - T_1 - T_2 + R_B^y = 2,593 - 2,456 - 3,275 + 3,138 = 5,731 - 5,731 = 0.$$

$$M_1^x = 0; \quad M_2^x = R_A^y \cdot 0,2 = 2,593 \cdot 0,2 = 0,519 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3^x = M_2^x = 0,519 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4^x = R_A^y \cdot 0,5 - T_1 \cdot 0,3 = 2,593 \cdot 0,5 - 2,456 \cdot 0,3 = 0,560 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5^x = M_4^x - M_S = 0,560 - 0,246 = 0,314 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_6^x = 0.$$

4 Визначаємо опорні реакції вала у горизонтальній площині (рис. 4.14, ж) та будуємо епюру згинальних моментів M_y (рис. 4.14, к):

$$\sum M_A = 0: \quad -P_1 \cdot 0,2 + P_2 \cdot 0,5 - R_B^x \cdot 0,6 = 0$$

$$R_B^x = \frac{1}{0,6} \cdot (-P_1 \cdot 0,2 + P_2 \cdot 0,5) =$$

$$= \frac{1}{0,6} \cdot (-6,140 \cdot 0,2 + 8,187 \cdot 0,5) = 4,776 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: \quad -R_A^x \cdot 0,6 + P_1 \cdot 0,4 - P_2 \cdot 0,1 = 0$$

$$R_A^x = \frac{1}{0,6} \cdot (P_1 \cdot 0,4 - P_2 \cdot 0,1) = \frac{1}{0,6} \cdot (6,140 \cdot 0,4 - 8,187 \cdot 0,1) = 2,729 \text{ кН};$$

Перевірка:

$$\sum P_x = R_A^x - P_1 + P_2 - R_B^x = 2,729 - 6,140 + 8,187 - 4,776 = 10,916 - 10,916 = 0.$$

$$M_1^y = 0; \quad M_2^y = M_3^y = R_A^x \cdot 0,2 = 2,729 \cdot 0,2 = 0,546 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4^y = M_5^y = R_A^x \cdot 0,5 - P_1 \cdot 0,3 = 2,729 \cdot 0,5 - 6,140 \cdot 0,3 = -0,478 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_6^y = 0.$$

5 Прикладаємо крутні моменти до вала (рис. 4.14, л) та будуємо епюру крутних моментів – $M_{кр}$ (рис. 4.14, м):

$$M_1^{кр} = 0; \quad M_2^{кр} = 0; \quad M_3^{кр} = M_{кр} = 1,228 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4^{кр} = M_{кр} = 1,228 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_5^{кр} = 0; \quad M_6^{кр} = 0.$$

Визначаємо величини приведених моментів у характерних перерізах балки і будуємо епюру M_{np} * (рис. 3.14, н):

$$M_1^{np} = \sqrt{(M_1^x)^2 + (M_1^y)^2 + (M_1^{kp})^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2} = 0;$$

$$M_2^{np} = \sqrt{(M_2^x)^2 + (M_2^y)^2 + (M_2^{kp})^2} = \sqrt{0,519^2 + 0,546^2 + 0^2} = 0,753 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3^{np} = \sqrt{(M_3^x)^2 + (M_3^y)^2 + (M_3^{kp})^2} = \sqrt{0,519^2 + 0,546^2 + 1,228^2} = 1,441 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4^{np} = \sqrt{(M_4^x)^2 + (M_4^y)^2 + (M_4^{kp})^2} = \sqrt{0,560^2 + 0,478^2 + 1,228^2} = 1,432 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5^{np} = \sqrt{(M_5^x)^2 + (M_5^y)^2 + (M_5^{kp})^2} = \sqrt{0,560^2 + 0,478^2 + 0^2} = 0,736 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6^{np} = \sqrt{(M_6^x)^2 + (M_6^y)^2 + (M_6^{kp})^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2} = 0.$$

Примітка:

На ділянках вала, де діє крутний момент, епюра M_{np} криволінійна і вогнута, а на інших – прямолінійна.

В цьому можна пересвідчитись, підрахувавши величину M_{np} в додатковому (середньому) перерізі тієї чи іншої ділянки вала.

7 Аналізуючи епюру M_{np} , бачимо, що небезпечним є переріз 3, в якому $M_{np} = M_{np}^{max} = 1,441 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

8 Визначаємо необхідний діаметр вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{np}^{max}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1,441 \times 10^6}{3,14 \cdot 80}} = 56,83 \text{ мм}.$$

З нормального ряду приймаємо $d=63 \text{ мм}$.

5 РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

5.1 Один раз статично невизначувана балка

Для нерозрізної балки побудувати епюри внутрішніх зусиль, підібрати двотавровий переріз і визначити прогин в точці K і кут повороту перерізу A , якщо $[\sigma] = 160$ МПа.

Вихідні дані вибрати із таблиць 5.1 і 5.2 і рисунку 5.1.

Таблиця 5.1 – Вихідні дані до задачі 5.1

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a, \text{ м}$	2,6	2,4	2,5	2,2	3,0	2,6	2,4	1,8	2,6	2,0
$b, \text{ м}$	4,2	3,4	4,0	3,6	4,5	3,0	3,5	2,5	3,2	4,4
$c, \text{ м}$	1,2	1,0	0,8	0,9	1,3	1,1	0,9	0,8	1,0	1,4

Таблиця 5.2 – Вихідні дані до задачі 5.1

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$M, \text{ кН}\cdot\text{м}$	60	25	65	35	48	30	56	32	40	62
$P, \text{ кН}$	35	42	38	58	40	56	45	54	50	52
$q, \text{ кН/м}$	20	30	22	32	24	34	26	36	28	40

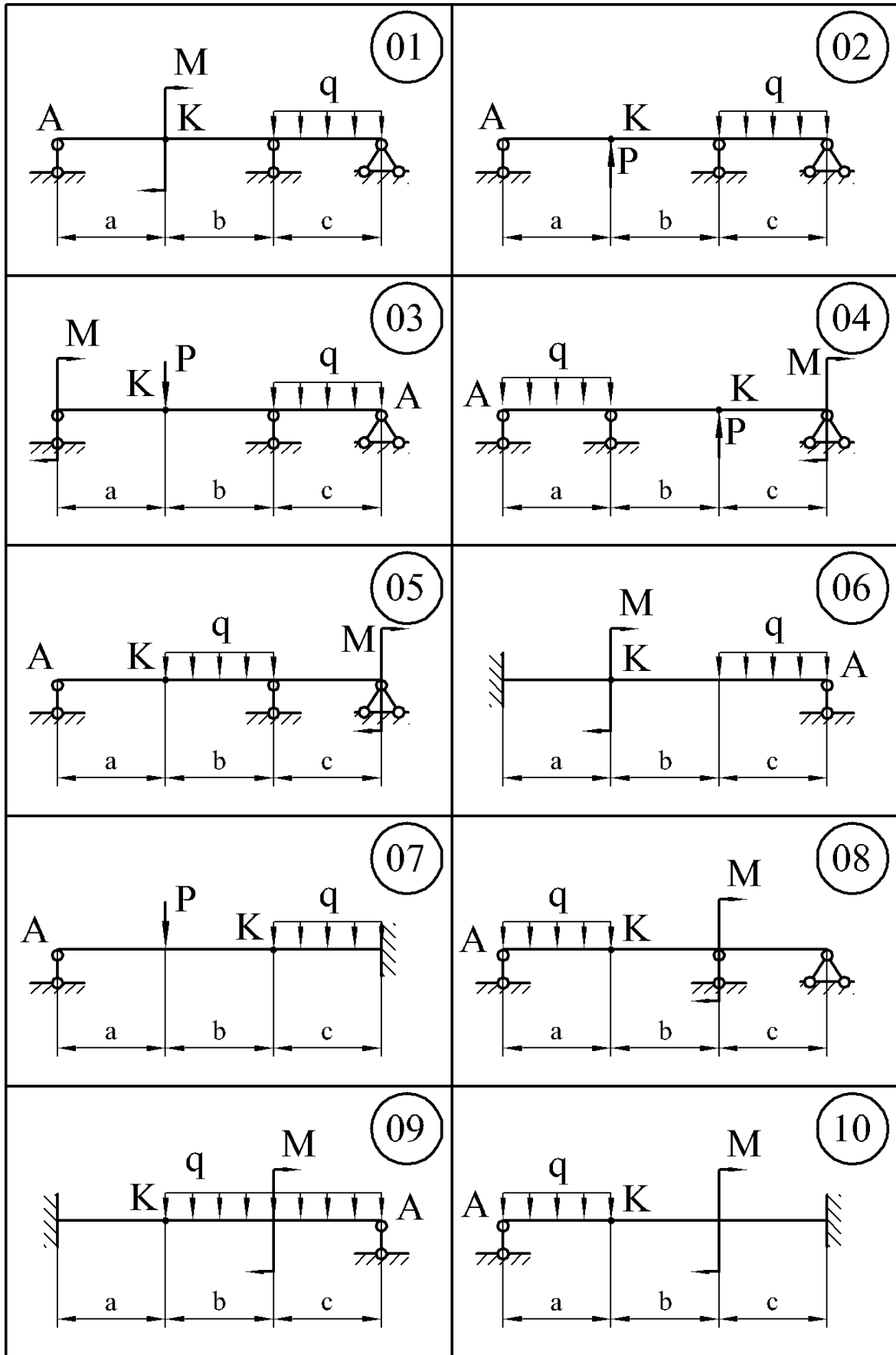


Рисунок 5.1

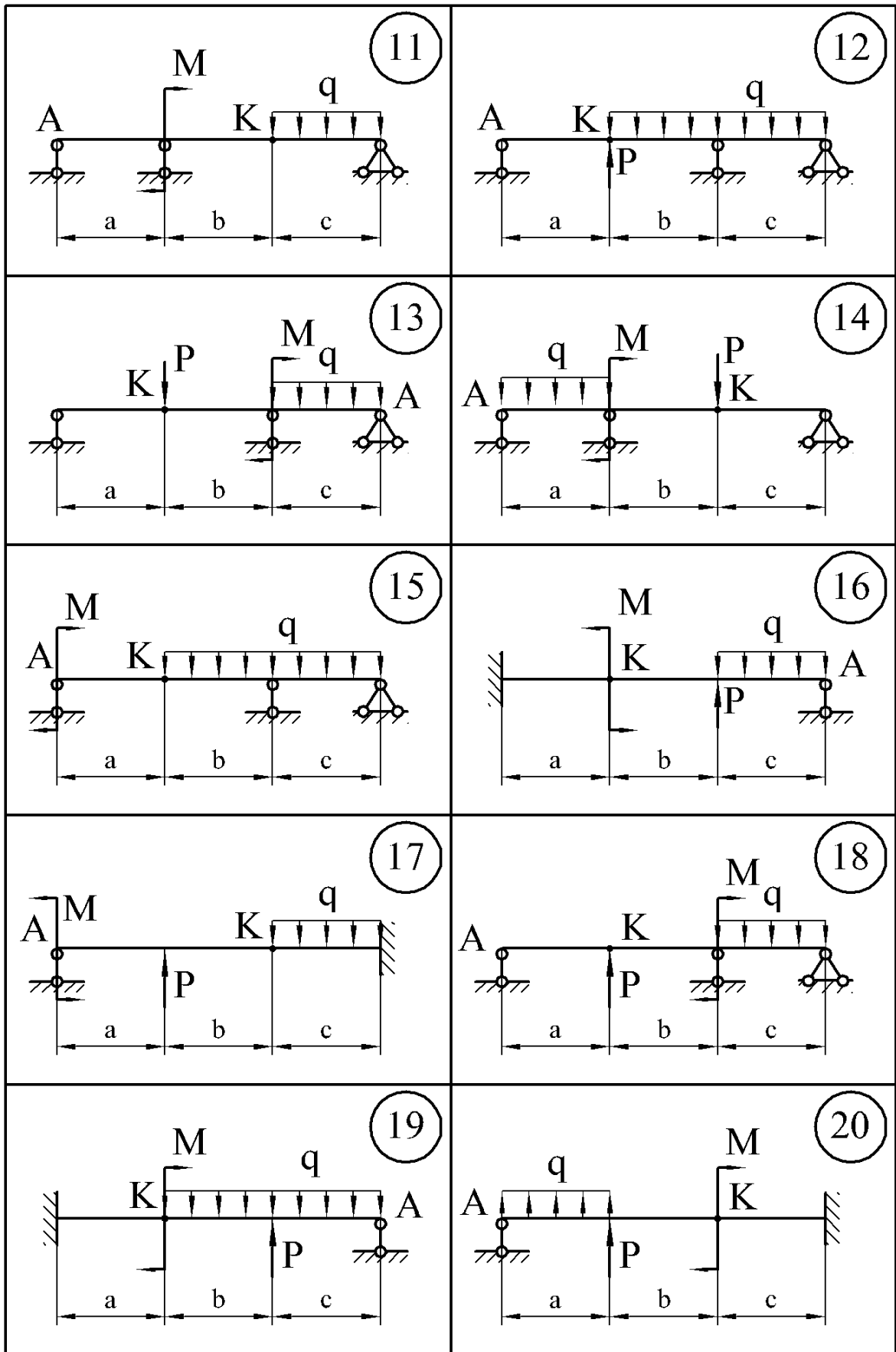


Рисунок 5.1, аркуш 2

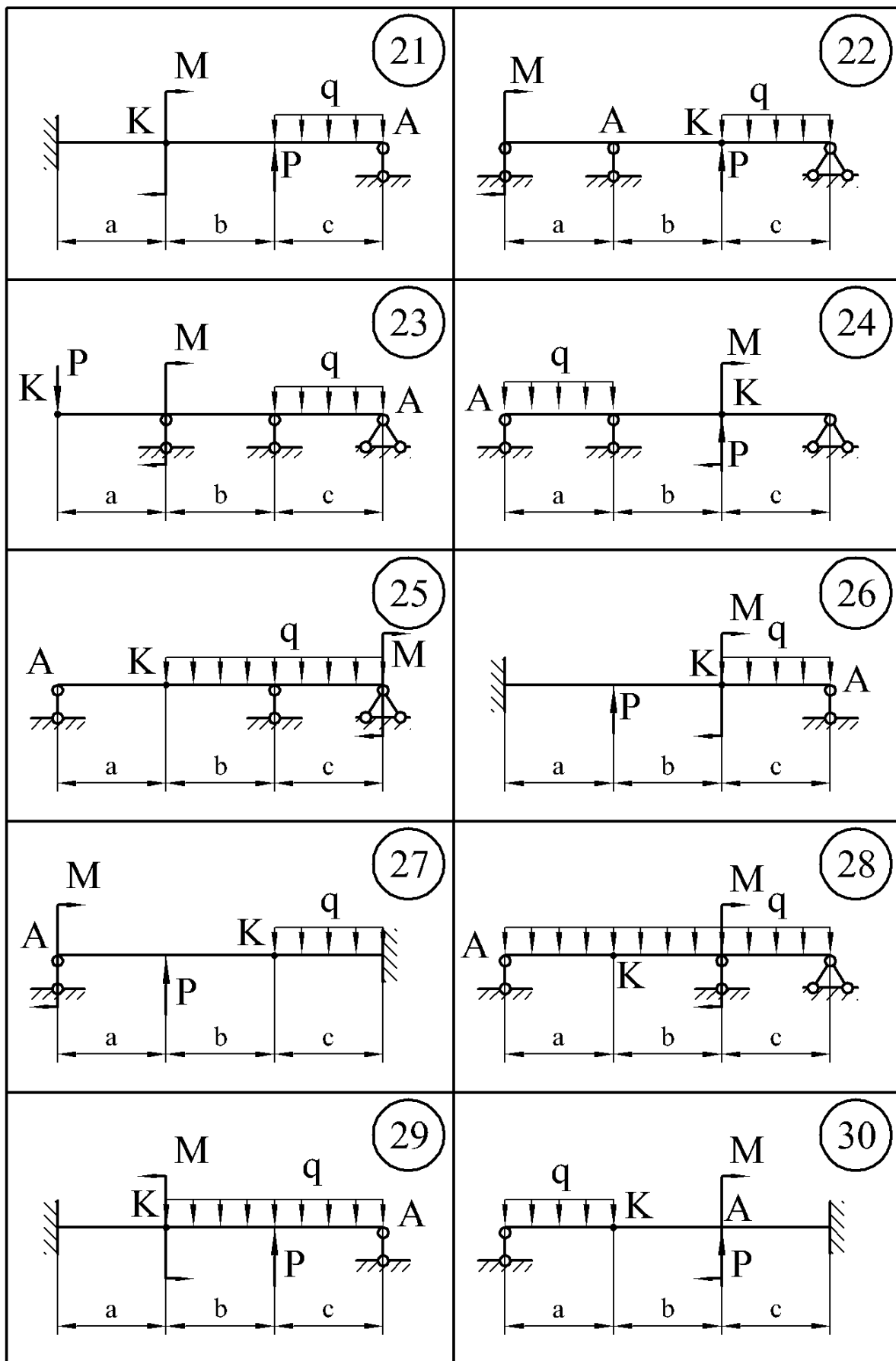


Рисунок 5.1, аркуш 3

5.1.1 Методичні вказівки до виконання задачі 5.1

Для розрахунку нерозрізних балок застосувати метод сил в наступному порядку:

- 1 Встановити ступінь статичної невизначуваності S .
- 2 Вибрати основну систему шляхом урізання шарнірів в місцях проміжних опор або заміни защемлення шарнірно-нерухомою опорою.
- 3 Побудувати еквівалентну систему, для чого до основної системи прикласти зовнішні навантаження і невідомі зусилля (моменти в місцях врізаних шарнірів).
- 4 Скласти систему канонічних рівнянь.
- 5 Побудувати епюри згинальних моментів окремо від зовнішніх навантажень і від одиничних моментів, прикладених в місцях постановки шарнірів.
- 6 Шляхом «перемножування» епюр визначити коефіцієнти канонічних рівнянь і вільні члени.
- 7 Вирішити систему рівнянь і визначити невідомі моменти. До кожної окремої балки прикласти задане навантаження, обчислені опорні моменти і побудувати епюри поперечних сил та згинальних моментів.
- 8 По найбільшому згинаючому моменту з умови міцності на згинання визначити момент опору і з таблиць сортаменту підібрати двотавр.
- 9 Використовуючи один із способів «перемножування» епюр, визначити прогин і кут повороту у вказаних перерізах.

5.1.2 Приклад розв'язання задачі 5.1

1 Розрахунок починаємо з визначення ступеню статичної невизначуваності. Оскільки невідомих реакцій чотири (рис. 5.2, а), а рівнянь статички можна скласти тільки три, то дана задача один раз статично невизначувана.

2 Вибираємо основну систему. Як основну систему застосовуємо систему із врізаним шарніром, що заміняє “зайву” проміжну опору (рис. 5.2, б).

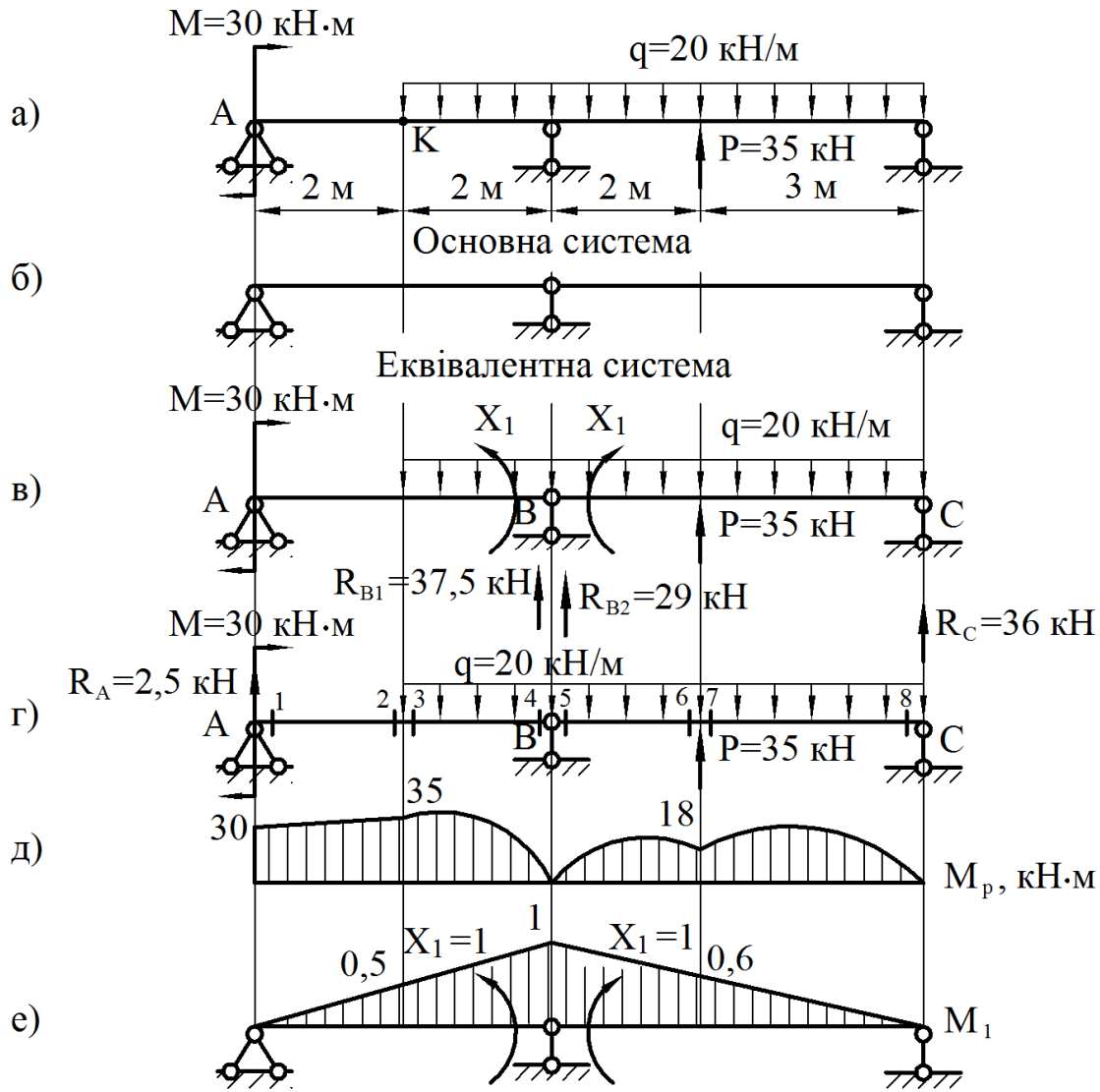


Рисунок 5.2

3 Одержуємо еквівалентну систему, завантажуючи основну систему заданим навантаженням і невідомим згинальним моментом X_1 (рис. 5.2, в). Таким чином, еквівалентна система являє собою дві прості шарнірно оперті балки AB та BC , навантажені заданим навантаженням і невідомим згинальним моментом X_1 , що заміняє відкинутий зв'язок між сусідніми прольотами.

4 Для того, щоб визначити невідомий згинальний момент X_1 , скористаємося канонічним рівнянням

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

5 Розглянемо основну систему, навантажену тільки заданим навантаженням (рис. 5.2, г).

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження, розглядаючи балку AB (рис. 5.2, г).

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0, \\ -M - q \cdot 2 \cdot 3 + R_{B1} \cdot 4 &= 0, \\ R_{B1} &= \frac{M + q \cdot 2 \cdot 3}{4} = \frac{30 + 20 \cdot 2 \cdot 3}{4} = 37,5 \text{ кН.} \\ \sum M_B &= 0, \\ -M + q \cdot 2 \cdot 1 - R_A \cdot 4 &= 0, \\ R_A &= \frac{-M + q \cdot 2 \cdot 1}{4} = \frac{-30 + 20 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 2,5 \text{ кН.}\end{aligned}$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$.

$$\begin{aligned}-q \cdot 2 + R_A + R_{B1} &= 0, \\ -20 \cdot 2 + 2,5 + 37,5 &= 0, \\ -40 + 40 &= 0.\end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження M_p для балки AB , обчислюючи значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис. 5.2, г):

$$\begin{aligned}M_1 &= M = 30 \text{ кНм}, \\ M_2 = M_3 &= M + R_A \cdot 2 = 30 + 2,5 \cdot 2 = 35 \text{ кНм}, \\ M_4 &= 0 \text{ кНм}.\end{aligned}$$

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження, розглядаючи балку BC (рис. 5.2, г).

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0, \\ P \cdot 2 - q \cdot 5 \cdot 2,5 + R_C \cdot 5 &= 0,\end{aligned}$$

$$R_C = \frac{P \cdot 2 - q \cdot 5 \cdot 2,5}{5} = \frac{35 \cdot 2 - 20 \cdot 5 \cdot 2,5}{5} = 36 \text{ кН.}$$

$$\sum M_C = 0,$$

$$-P \cdot 3 + q \cdot 5 \cdot 2,5 - R_{B2} \cdot 5 = 0,$$

$$R_{B2} = \frac{-P \cdot 3 + q \cdot 5 \cdot 2,5}{5} = \frac{-35 \cdot 3 + 20 \cdot 5 \cdot 2,5}{5} = 29 \text{ кН.}$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$.

$$P - q \cdot 5 + R_{B2} + R_C = 0,$$

$$35 - 20 \cdot 5 + 29 + 36 = 0,$$

$$100 - 100 = 0.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження M_p для балки BC , обчислюючи значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис. 5.2, г):

$$M_5 = M_8 = 0 \text{ кНм,}$$

$$M_6 = M_7 = R_{B2} \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 29 \cdot 2 - 20 \cdot 2 \cdot 1 = 18 \text{ кНм.}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії заданого навантаження по характерних перерізах (рис. 5.2, д).

6 Розглянемо основну систему, навантажену тільки одиничним моментом X_1 .

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис. 5.2, е):

$$M_1 = M_8 = 0,$$

$$M_4 = M_5 = X_1 = 1,$$

$$M_2 = M_3 = \frac{2}{4} = 0,5,$$

$$M_6 = M_7 = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту по характерних перерізах (див. рис. 5.2, е).

7 Коефіцієнти рівняння δ_{11} і Δ_{1p} визначаємо методом Мору шляхом «перемножування» відповідних епюр.

«Перемноживши» епюру M_1 на епюру M_1 , одержимо δ_{11} .

$$\delta_{11} = \frac{4}{6EJ_x}(2 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{5}{6EJ_x}(2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{3}{EJ_x}.$$

«Помноживши» M_1 на M_p , одержимо Δ_{1p} .

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} = & \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 35 \cdot 0,5 + 30 \cdot 0,5) + \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 35 \cdot 0,5 + 35 \cdot 1) + \\ & + \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x}(0,5 + 1) + \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 18 \cdot 0,6 + 18 \cdot 1) + \\ & + \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x}(1 + 0,6) + \frac{3}{6EJ_x}(2 \cdot 18 \cdot 0,6) + \frac{20 \cdot 3^3}{24EJ_x}(0,6 + 0) = \frac{98,2}{EJ_x}. \end{aligned}$$

8 Підставляємо коефіцієнти в канонічне рівняння, з рішення якого знаходимо X_1 :

$$\frac{3}{EJ_x} X_1 + \frac{98,2}{EJ_x} = 0,$$

$$3X_1 + 98,2 = 0,$$

$$X_1 = -\frac{98,2}{3} = -32,7 \text{ кНм.}$$

9 Розглянемо еквівалентну систему, тобто статично визначену основну систему, під дією заданого навантаження та знайденого моменту $X_1 = 32,7$ кНм. Тому що X_1 одержали зі знаком «-», то його напрямок змінюємо на протилежний (рис. 5.3, а).

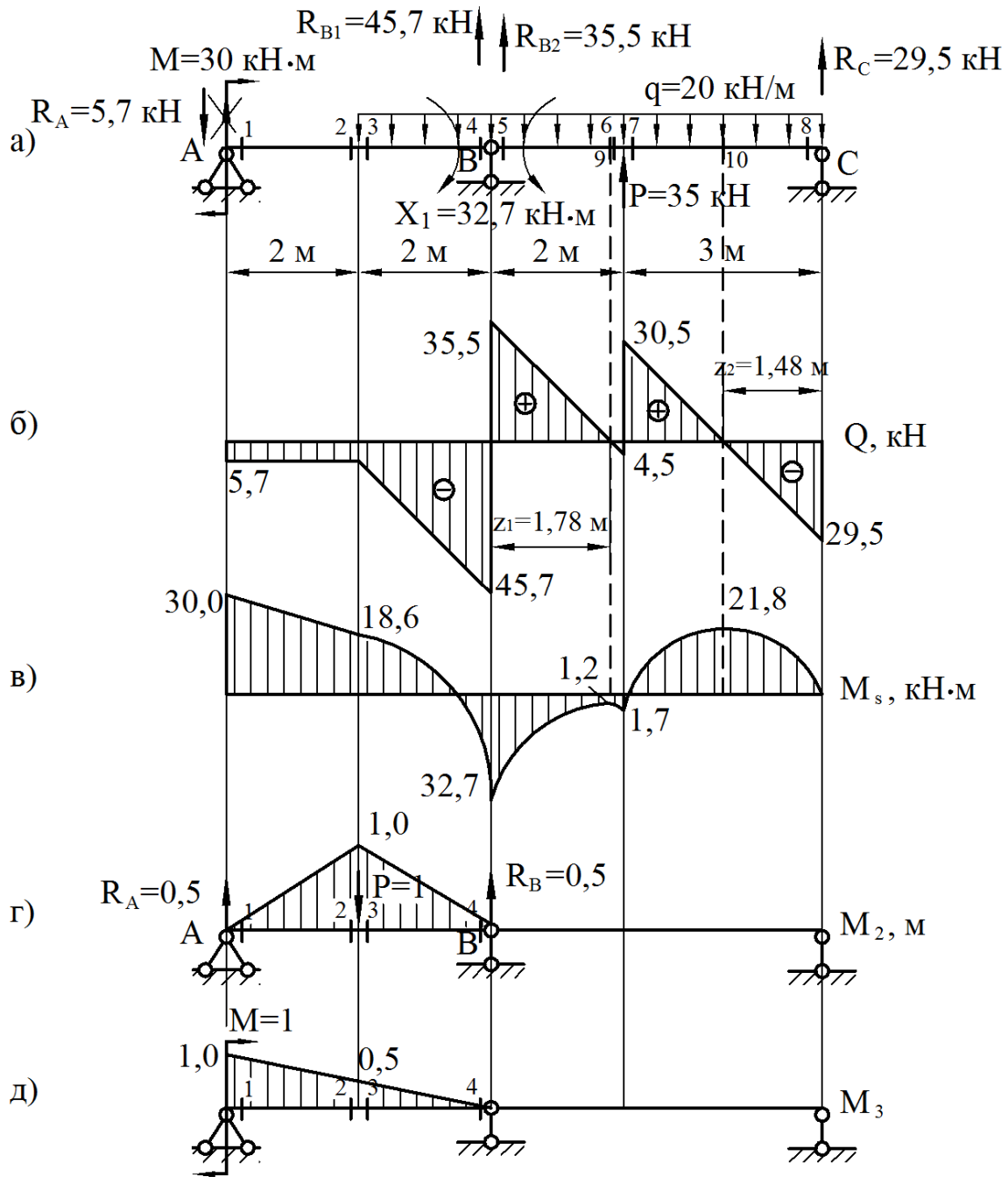


Рисунок 5.3

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження та знайдемо моменту $X_1 = 32,7$ кНм, розглядаючи балку AB (рис. 5.3, а):

$$\sum M_A = 0,$$

$$-M - q \cdot 2 \cdot 3 - X_1 + R_{B1} \cdot 4 = 0,$$

$$R_{B1} = \frac{M + q \cdot 2 \cdot 3 + X_1}{4} = \frac{30 + 20 \cdot 2 \cdot 3 + 32,7}{4} = 45,7 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$-M + q \cdot 2 \cdot 1 - X_1 - R_A \cdot 4 = 0,$$

$$R_A = \frac{-M + q \cdot 2 \cdot 1 - X_1}{4} = \frac{-30 + 20 \cdot 2 \cdot 1 - 32,7}{4} = -5,7 \text{ кН.}$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$.

$$-q \cdot 2 + R_A + R_{B1} = 0,$$

$$-20 \cdot 2 - 5,7 + 45,7 = 0,$$

$$-45,7 + 45,7 = 0.$$

Обчислюємо значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = -R_A = -5,7 \text{ кН,}$$

$$Q_4 = -R_{B1} = -45,7 \text{ кН.}$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$M_1 = M = 30 \text{ кНм,}$$

$$M_2 = M_3 = M - R_A \cdot 2 = 30 - 5,7 \cdot 2 = 18,6 \text{ кНм,}$$

$$M_4 = -X_1 = -32,7 \text{ кНм.}$$

Визначасмо опорні реакції від дії заданого навантаження та знайдемо моменту $X_1 = 32,7$ кНм, розглядаючи балку BC (рис. 5.3, а):

$$\sum M_B = 0,$$

$$P \cdot 2 - q \cdot 5 \cdot 2,5 + X_1 + R_C \cdot 5 = 0,$$

$$R_C = \frac{-P \cdot 2 + q \cdot 5 \cdot 2,5 - X_1}{5} = \frac{-35 \cdot 2 + 20 \cdot 5 \cdot 2,5 - 32,7}{5} = 29,5 \text{ кН.}$$

$$\sum M_C = 0,$$

$$-P \cdot 3 + q \cdot 5 \cdot 2,5 + X_1 - R_{B2} \cdot 5 = 0,$$

$$R_{B2} = \frac{-P \cdot 3 + q \cdot 5 \cdot 2,5 + X_1}{5} = \frac{-35 \cdot 3 + 20 \cdot 5 \cdot 2,5 + 32,7}{5} = 35,5 \text{ кН.}$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$.

$$\begin{aligned} P - q \cdot 5 + R_{B2} + R_C &= 0, \\ 35 - 20 \cdot 5 + 35,5 + 29,5 &= 0, \\ 100 - 100 &= 0. \end{aligned}$$

Обчислюємо значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$\begin{aligned} Q_5 &= R_{B1} = 35,5 \text{ кН,} \\ Q_6 &= R_{B1} - q \cdot 2 = 35,5 - 20 \cdot 2 = -4,5 \text{ кН,} \\ Q_8 &= -R_C = -29,5 \text{ кН,} \\ Q_7 &= -R_C + q \cdot 3 = -29,5 + 20 \cdot 3 = 30,5 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$\begin{aligned} M_5 &= -X_1 = -32,7 \text{ кНм,} \\ M_6 = M_7 &= -X_1 + R_{B2} \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = -32,7 + 35,5 \cdot 2 - 20 \cdot 2 \cdot 1 = -1,7 \text{ кНм,} \\ M_8 &= 0 \text{ кНм.} \end{aligned}$$

Так як епюра поперечних сил пересікає базову лінію та міняє знак з «+» на «-», то в цих точках маємо максимальні значення згинальних моментів.

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{35,5}{20} = 1,78 \text{ м,} \\ M_9 &= -X_1 + R_{B2} \cdot z_1 - q \cdot z_1 \cdot \frac{z_1}{2} = \\ &= -32,7 + 35,5 \cdot 1,78 - 20 \cdot 1,78 \cdot \frac{1,78}{2} = -1,2 \text{ кНм,} \\ z_2 &= \frac{29,5}{20} = 1,48 \text{ м,} \end{aligned}$$

$$M_{10} = R_C \cdot z_2 - q \cdot z_2 \cdot \frac{z_2}{2} = 29,5 \cdot 1,48 - 20 \cdot 1,48 \cdot \frac{1,48}{2} = 21,8 \text{ кНм}.$$

Будуємо епюри поперечних сил (рис. 5.3, б) і згинальних моментів (рис. 5.3, в).

10 Виконуємо деформаційну перевірку. Вона полягає в тому, що при «перемножуванні» епюри M_S на M_1 повинен вийти нуль.

$$\begin{aligned} \Delta_{1s} &= \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 18,6 \cdot 0,5 + 30 \cdot 0,5) + \\ &+ \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 18,6 \cdot 0,5 - 2 \cdot 32,7 \cdot 1 + 18,6 \cdot 1 - 32,7 \cdot 0,5) + \\ &+ \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x} (0,5 + 1) + \frac{2}{6EJ_x} (-2 \cdot 32,7 \cdot 1 - 2 \cdot 1,7 \cdot 0,6 - 32,7 \cdot 0,6 - 1,7 \cdot 1) + \\ &+ \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x} (1 + 0,6) + \frac{3}{6EJ_x} (-2 \cdot 1,7 \cdot 0,6) + \frac{20 \cdot 3^3}{24EJ_x} (0,6 + 0) = \\ &= \frac{11,20 - 14,85 + 10 - 29,59 + 10,67 - 1,02 + 13,50}{EJ_x} = \frac{45,37 - 45,46}{EJ_x}. \end{aligned}$$

Визначаємо похибку. При визначенні похибки необхідно обчислити всі додатні та від'ємні величини окремо, а потім різницю розділити на меншу з величин за модулем та помножити на 100%. Похибка складає:

$$\left| \frac{45,37 - 45,46}{45,37} \right| \cdot 100\% = 0,20\%$$

11 На епюрі згинальних моментів (див. рис.5.3, в) знаходимо небезпечний переріз, в якому $M_{max} = 30 \text{ кНм}$.

Розміри перерізу підбираємо з умови міцності на згинання

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Визначимо необхідний момент опору перерізу:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]},$$

$$W_x \geq \frac{30 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^6 = 187,5 \text{ см}^3.$$

Номер двотавра знаходимо за розрахунковим значенням моменту опору $W_x \geq 187,5 \text{ см}^3$. По таблиці сортаменту вибираємо двотавр № 20а, для якого $W_x = 203 \text{ см}^3$, $J_x = 2030 \text{ см}^4$.

12 Визначаємо прогин в точці K . Для цього до основної системи в точці K прикладаємо одиничну силу, від неї визначаємо реакції опор і будуємо епюру згинальних моментів (рис.5.3, г), яку «перемножуємо» на епюру M_s (див. рис.5.3, в).

$$y_K = \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 18,6 \cdot 1 + 30 \cdot 1) + \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 18,6 \cdot 1 - 32,7 \cdot 1) +$$

$$+ \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x}(0 + 1) = \frac{22,40 + 1,50 + 6,67}{EJ_x} = \frac{30,57}{EJ_x} = \frac{30,57 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 2030 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= 7,53 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 7,53 \text{ мм}.$$

Знак «плюс» вказує на те, що точка K переміщається по напрямку одиничної сили, тобто вниз.

13 Визначення кута повороту перерізу A . У перерізі A прикладаємо одиничний момент, від нього будуємо епюру згинальних моментів (рис.5.3, д), яку «перемножуємо» на епюру M_s (див. рис. 5.3, в).

$$\theta_A = \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 30 \cdot 1 + 2 \cdot 18,6 \cdot 0,5 + 30 \cdot 0,5 + 18,6 \cdot 1) +$$

$$+ \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 18,6 \cdot 0,5 - 32,7 \cdot 0,5) + \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x}(0,5 + 0) = \frac{37,40 - 4,70 + 3,33}{EJ_x} =$$

$$= \frac{36,03}{EJ_x} = \frac{36,03 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 2030 \cdot 10^{-8}} = 0,0089 \text{ рад}.$$

Знак «плюс» вказує на те, що переріз A повертається у напрямі одиничного моменту, тобто за годинниковою стрілкою.

5.2 Один раз статично невизначувана рама

Для сталевї рами необхідно розкрити статичну невизначуваність, побудувати епюри повздовжніх, поперечних сил і згинальних моментів, підібрати номер двотавра і визначити кут повороту перерізу K , якщо $[\sigma] = 160$ МПа.

Вихідні дані вибрати із таблиць 5.1 і 5.2 і рисунку 5.4.

5.2.1 Методичні вказівки до виконання задачі 5.2

План розв'язання задачі 5.2 такий же, як і для задачі 5.1. Вибір основної системи здійснюється шляхом відкидання «зайвих» зв'язків, решта етапів розв'язання аналогічна таким задачі 5.1.

5.2.2 Приклад розв'язання задачі 5.2

1 Аналізуємо задану систему (рис. 5.6, а). Встановлюємо ступінь статичної невизначуваності системи. Дана система один раз статично невизначувана.

2 Вибираємо основну систему, видаляючи «зайві зв'язки» і заміняючи вихідну систему статично визначеною (рис 5.5, б).

3 Одержуємо еквівалентну систему, завантажуючи основну систему заданим навантаженням та «зайвими невідомими зусиллями», що заміняють дію вилучених зв'язків (рис. 5.5, в).

4 Для того, щоб визначити «зайве невідоме зусилля» X_1 , скористаємося канонічним рівнянням

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

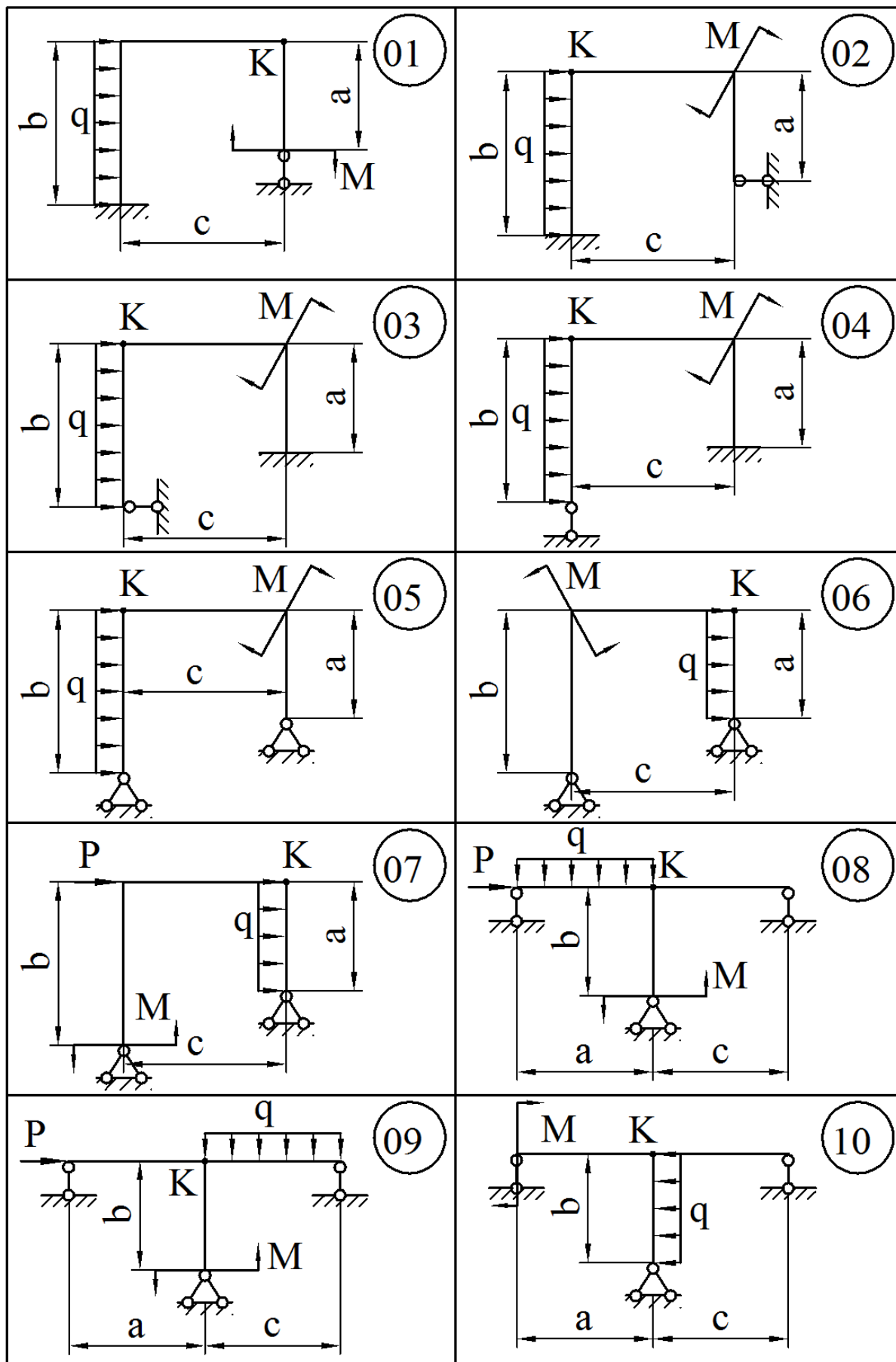


Рисунок 5.4

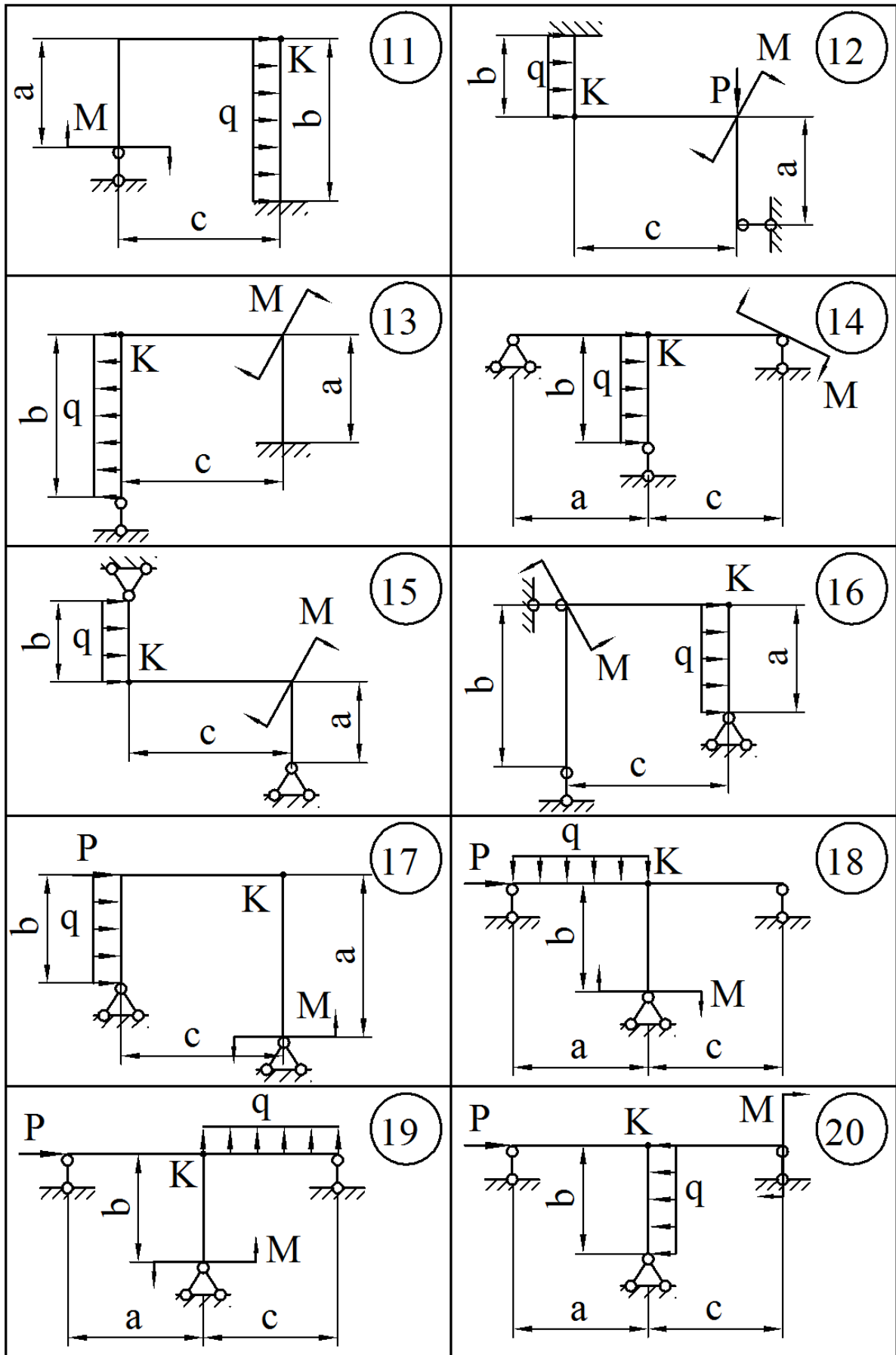


Рисунок 5.4, аркуш 2

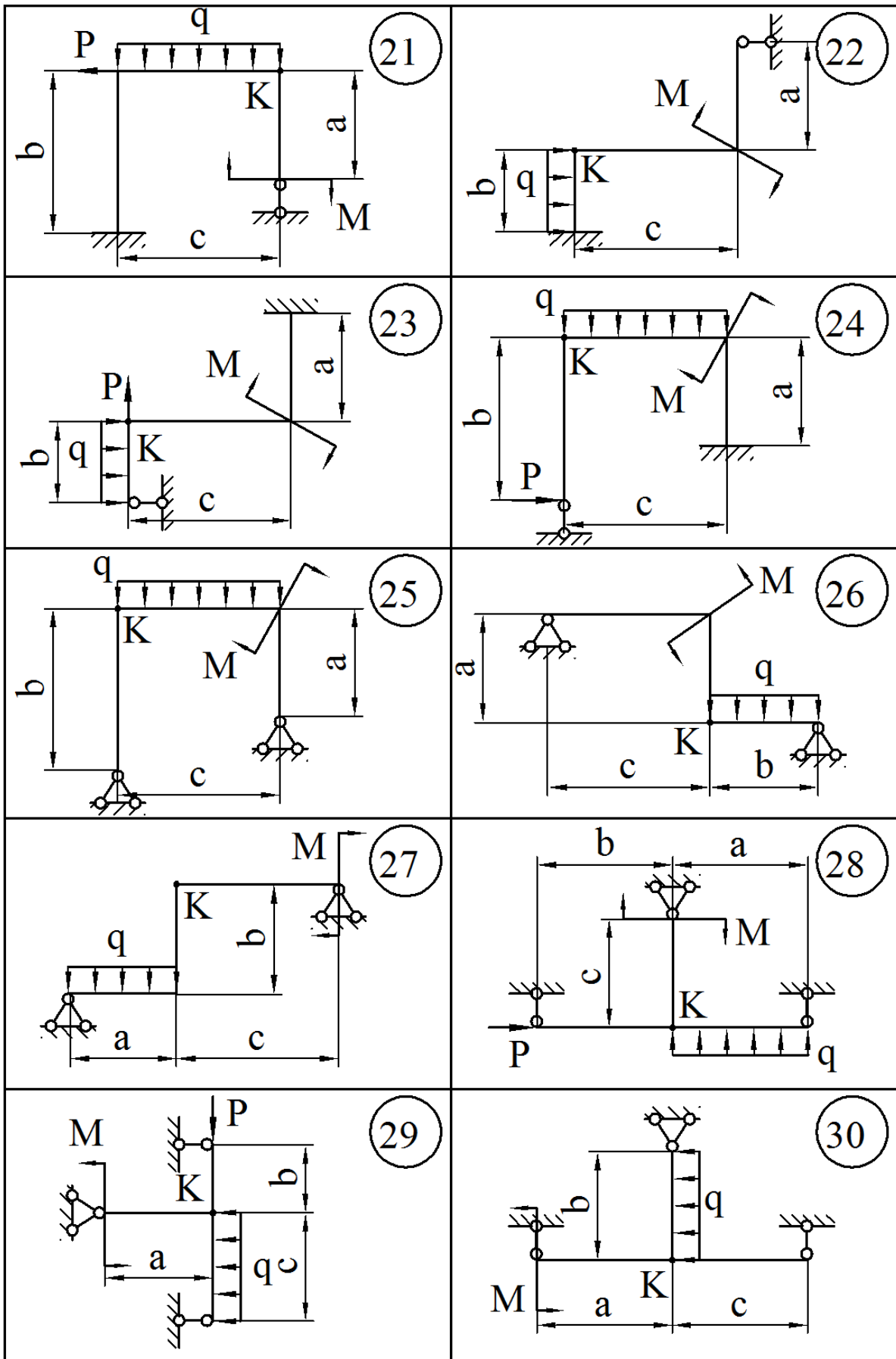
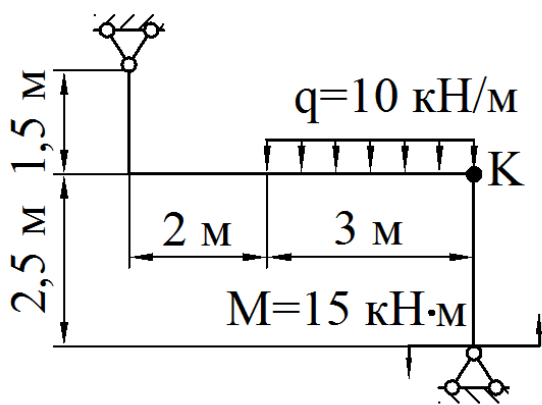
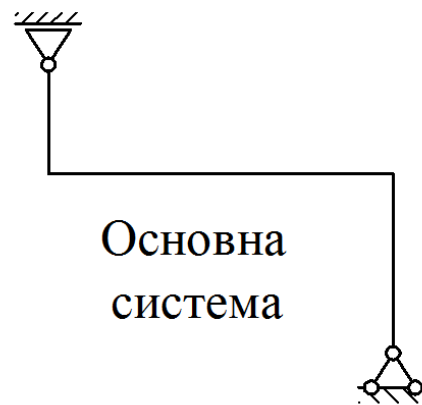


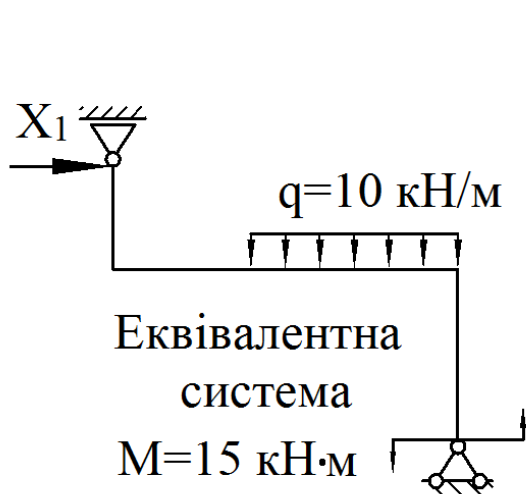
Рисунок 5.4, аркуш 3



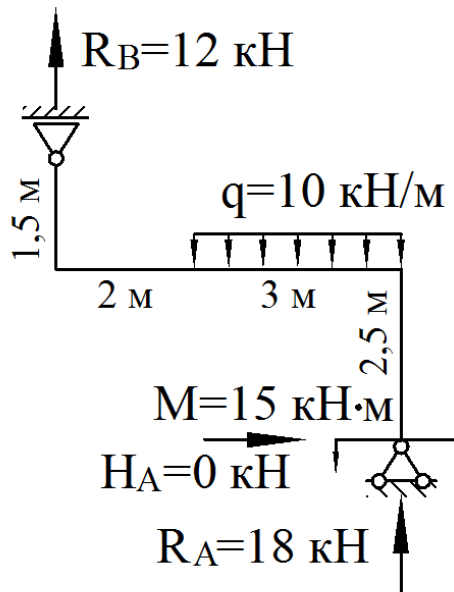
а)



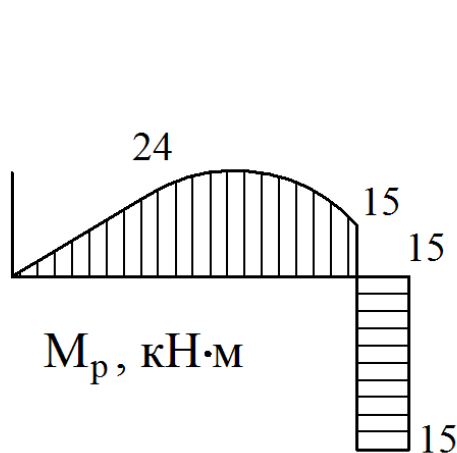
б)



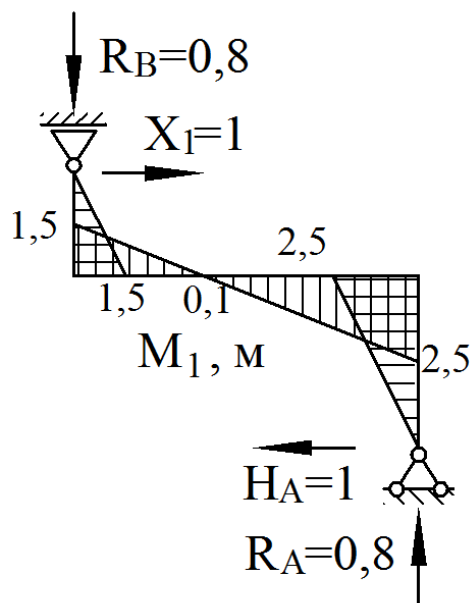
в)



г)



д)



е)

Рисунок 5.5

5 Розглянемо основну систему, навантажену тільки заданим навантаженням. Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження (рис. 5.5, г) та будуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження M_p по характерних перерізах (рис. 5.5, д).

6 Розглянемо основну систему, навантажену тільки одиничною силою X_1 . Визначаємо опорні реакції від дії одиничної сили (рис. 5.5, е) та будуємо епюру згинальних моментів від одиничної сили по характерних перерізах \overline{M}_1 (див. рис. 5.5, е).

7 Визначаємо коефіцієнти канонічного рівняння, перемножуючи відповідні епюри, використовуючи формулу крайніх ординат:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1,5}{6EJ_x}(2 \cdot 1,5 \cdot 1,5) + \frac{5}{6EJ_x}(2 \cdot 1,5 \cdot 1,5 + 2 \cdot 2,5 \cdot 2,5 - 1,5 \cdot 2,5 - 2,5 \cdot 1,5) + \\ &+ \frac{2,5}{6EJ_x}(2 \cdot 2,5 \cdot 2,5) = \frac{1,125 + 7,917 + 5,208}{EJ_x} = \frac{14,25}{EJ_x}, \\ \Delta_{1p} &= \frac{2}{6EJ_x}(-2 \cdot 24 \cdot 0,1 + 24 \cdot 1,5) + \\ &+ \frac{3}{6EJ_x}(-2 \cdot 24 \cdot 0,1 - 2 \cdot 15 \cdot 2,5 - 24 \cdot 2,5 - 0,1 \cdot 15) + \\ &+ \frac{10 \cdot 3^3}{24EJ_x}(-0,1 - 2,5) + \frac{2,5}{6EJ_x}(-2 \cdot 15 \cdot 2,5 - 15 \cdot 2,5) = -\frac{136,38}{EJ_x}. \end{aligned}$$

8 Розв'язуємо канонічне рівняння.

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} &= 0, \\ \frac{14,25}{EJ_x}X_1 - \frac{136,38}{EJ_x} &= 0, \\ 14,25X_1 - 136,38 &= 0, \\ X_1 &= \frac{136,38}{14,25} = 9,57 \text{ кН}. \end{aligned}$$

9 Розглянемо еквівалентну систему, тобто статично визначувану основну систему, під дією заданого навантаження та знайденої сили

$X_1 = 9,57$ кН (рис. 5.6, а). Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження та сили $X_1 = 9,57$ кН (див. рис. 5.6, а).

Будуємо епюри поздовжніх сил N (рис. 5.6, б), поперечних сил Q (рис. 5.6, в), а також згинальних моментів M_S (рис. 5.6, г) по характерних перерізах.

10 Виконуємо деформаційну перевірку. Так як в заданій статично невизначуваній системі переміщення по напрямку X_1 дорівнює нулю, то добуток остаточної епюри згинальних моментів M_S на епюру \overline{M}_1 повинен рівнятися нулю, тобто $\Delta_{1s} = 0$.

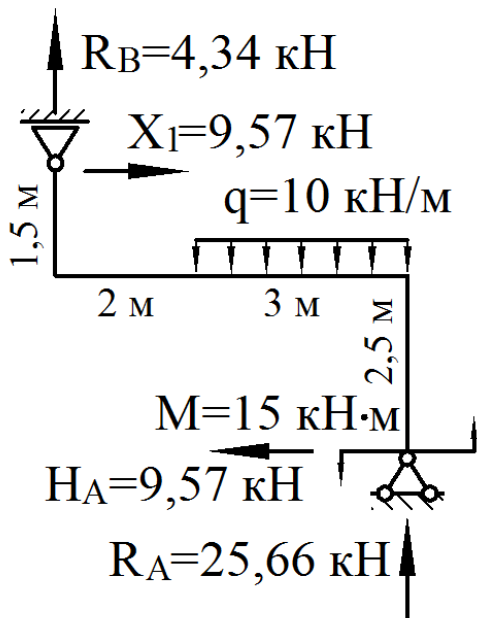
$$\begin{aligned} \Delta_{1s} &= \frac{1,5}{6EJ_x}(2 \cdot 14,36 \cdot 1,5) + \\ &\frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 14,36 \cdot 1,5 - 2 \cdot 23,04 \cdot 0,1 - 14,36 \cdot 0,1 + 23,04 \cdot 1,5) + \\ &+ \frac{3}{6EJ_x}(-2 \cdot 23,04 \cdot 0,1 + 2 \cdot 8,93 \cdot 2,5 - 23,04 \cdot 2,5 + 8,93 \cdot 0,1) + \\ &+ \frac{10 \cdot 3^3}{24EJ_x}(-0,1 - 2,5) + \frac{2,5}{6EJ_x}(2 \cdot 8,93 \cdot 2,5 - 15 \cdot 2,5) = \\ &= \frac{10,77 + 23,87 - 8,33 - 29,25 + 2,98}{EJ_x} = \frac{37,62 - 37,58}{EJ_x}. \end{aligned}$$

Похибка складає:

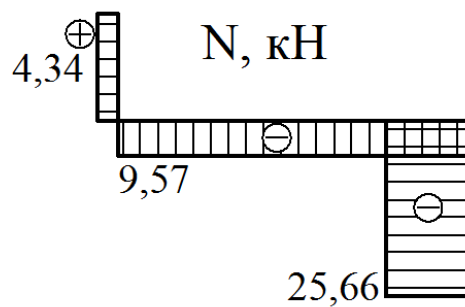
$$\left| \frac{37,62 - 37,58}{37,58} \right| \cdot 100\% = 0,11\%$$

11 Підбираємо поперечний переріз у вигляді двотавра.

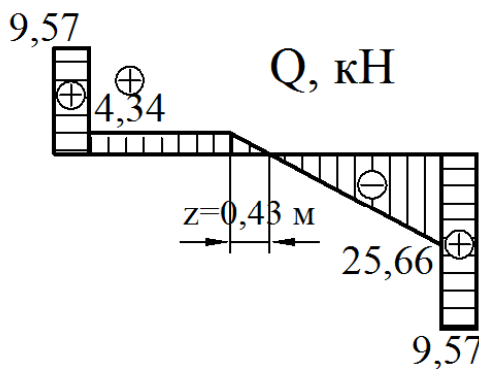
За епюрою M_S (див. рис. 5.6, г) знаходимо найбільший згинаючий момент $M_{\max} = 23,98$ кНм.



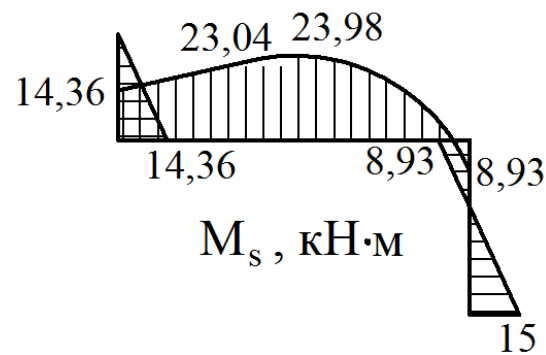
а)



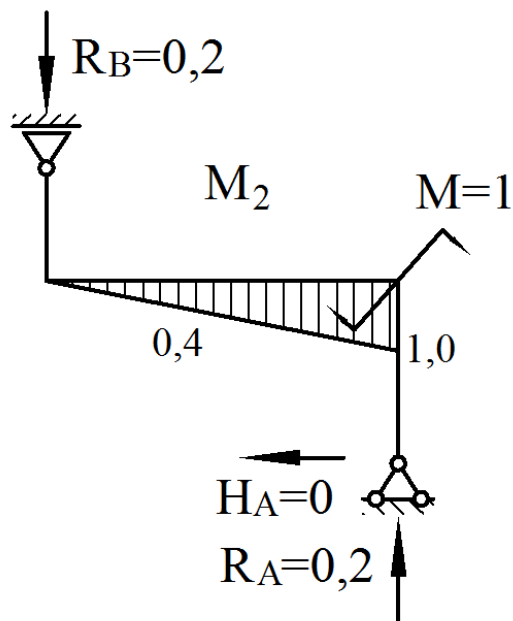
б)



в)



г)



д)

Рисунок 5.6

Так як осьова сила незначна, то розміри перерізу підбираємо з умови міцності на згинання:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_X} \leq [\sigma].$$

Визначимо необхідний момент опору перерізу:

$$W_X \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]},$$

$$W_X \geq \frac{23,98 \cdot 10^{-3}}{180} \cdot 10^6 = 133,2 \text{ см}^3.$$

Номер двотавра знаходимо за розрахунковим значенням моменту опору $W_X \geq 133,2 \text{ см}^3$. По таблиці сортаменту вибираємо двотавр № 18, для якого $W_X = 143 \text{ см}^3$, $J_X = 1290 \text{ см}^4$.

12 Визначаємо кут повороту перерізу К. Для цього до основної системи в перерізі К прикладаємо одиничний момент, тобто $M = 1$. Визначаємо опорні реакції від дії одиничного моменту (рис. 5.6, д) та будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту по характерних перерізах M_2 (див. рис 5.6, д).

$$\theta_K = \Delta_{2s} = \frac{2}{6EJ_x}(-2 \cdot 23,04 \cdot 0,4 - 14,36 \cdot 0,4) +$$

$$+ \frac{3}{6EJ_x}(-2 \cdot 23,04 \cdot 0,4 + 2 \cdot 8,93 \cdot 1,0 - 23,04 \cdot 1,0 + 8,93 \cdot 0,4) +$$

$$+ \frac{10 \cdot 3^3}{24EJ_x}(-0,4 - 1,0) = \frac{-33,83}{EJ_x}.$$

Кут повороту перерізу К дорівнює:

$$\theta_K = \frac{-33,83 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 0,0131 \text{ рад.}$$

Кут одержали з «мінусом», це означає що переріз K повертається у бік протилежний одиничному моменту, тобто проти годинникової стрілки.

5.3 Двічі статично невизначувана рама

Розкрити статичну невизначуваність рами, побудувати епюри по-вздовжніх, поперечних сил і згинальних моментів. Підібрати двотавровий переріз, якщо $[\sigma] = 160$ МПа, визначити кут повороту вузла K .

Виконати деформаційну перевірку. Відносна похибка не повинна бути більшою за 2%.

Вихідні дані вибрати із таблиць 5.3 та 5.4 і рисунку 5.7.

Таблиця 5.3 – Вихідні дані до задачі 5.3

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a, \text{ м}$	1,0	1,2	0,8	2,0	2,2	1,2	1,6	1,0	1,8	1,4
$b, \text{ м}$	2,0	1,6	1,4	2,4	1,4	1,8	2,0	1,4	1,2	2,2
$c, \text{ м}$	2,5	2,0	1,8	0,8	0,8	2,2	2,4	2,2	2,4	0,8
$d, \text{ м}$	2,2	0,8	1,0	1,2	1,8	0,8	1,0	0,8	0,8	1,8

Таблиця 5.4 – Вихідні дані до задачі 5.3

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$M, \text{ кН}\cdot\text{м}$	16	8	10	12	10	8	8	10	12	8
$P, \text{ кН}$	10	14	18	20	16	22	20	22	14	18
$q, \text{ кН/м}$	8	10	6	8	6	10	10	6	10	10

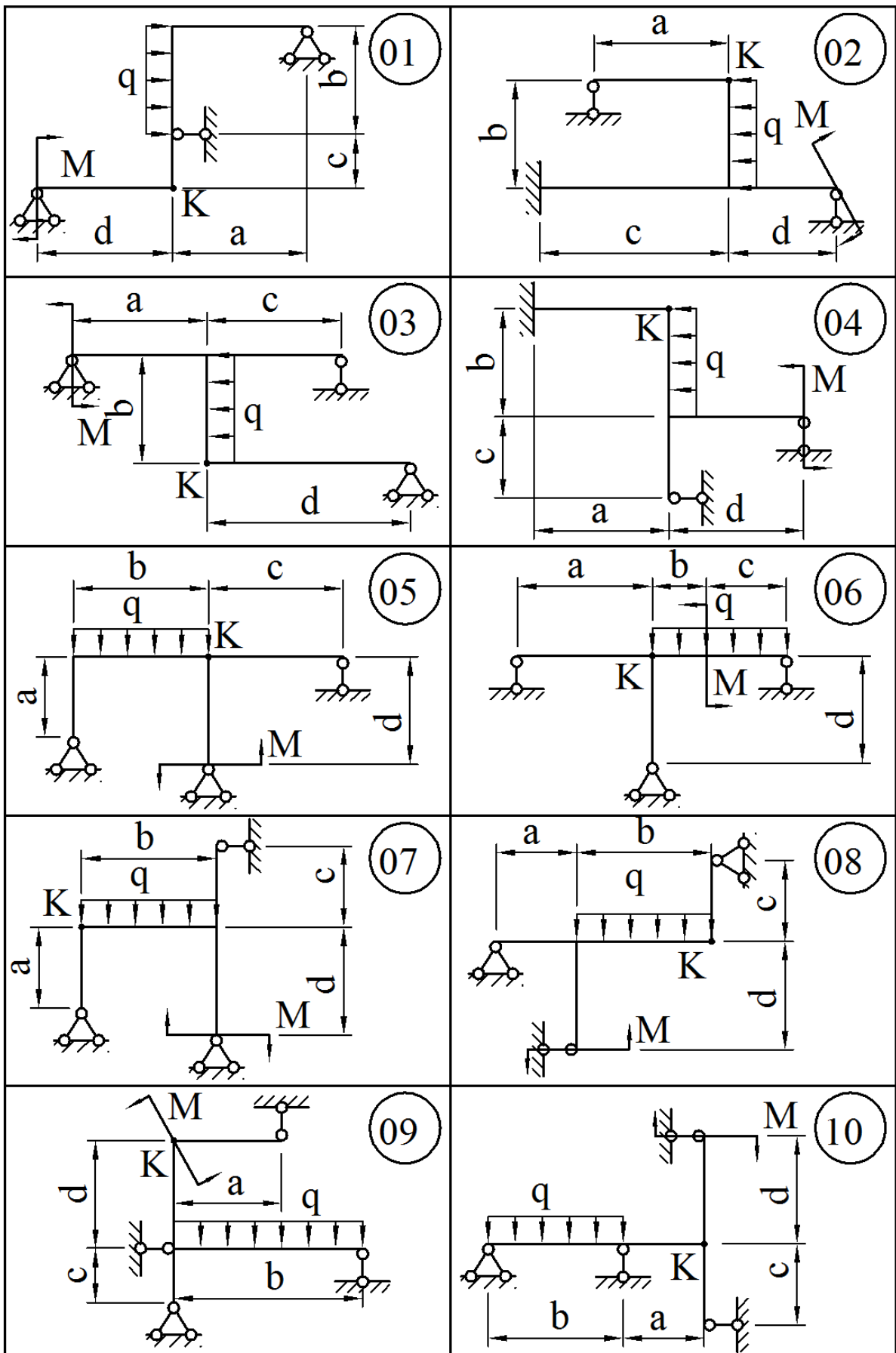


Рисунок 5.7

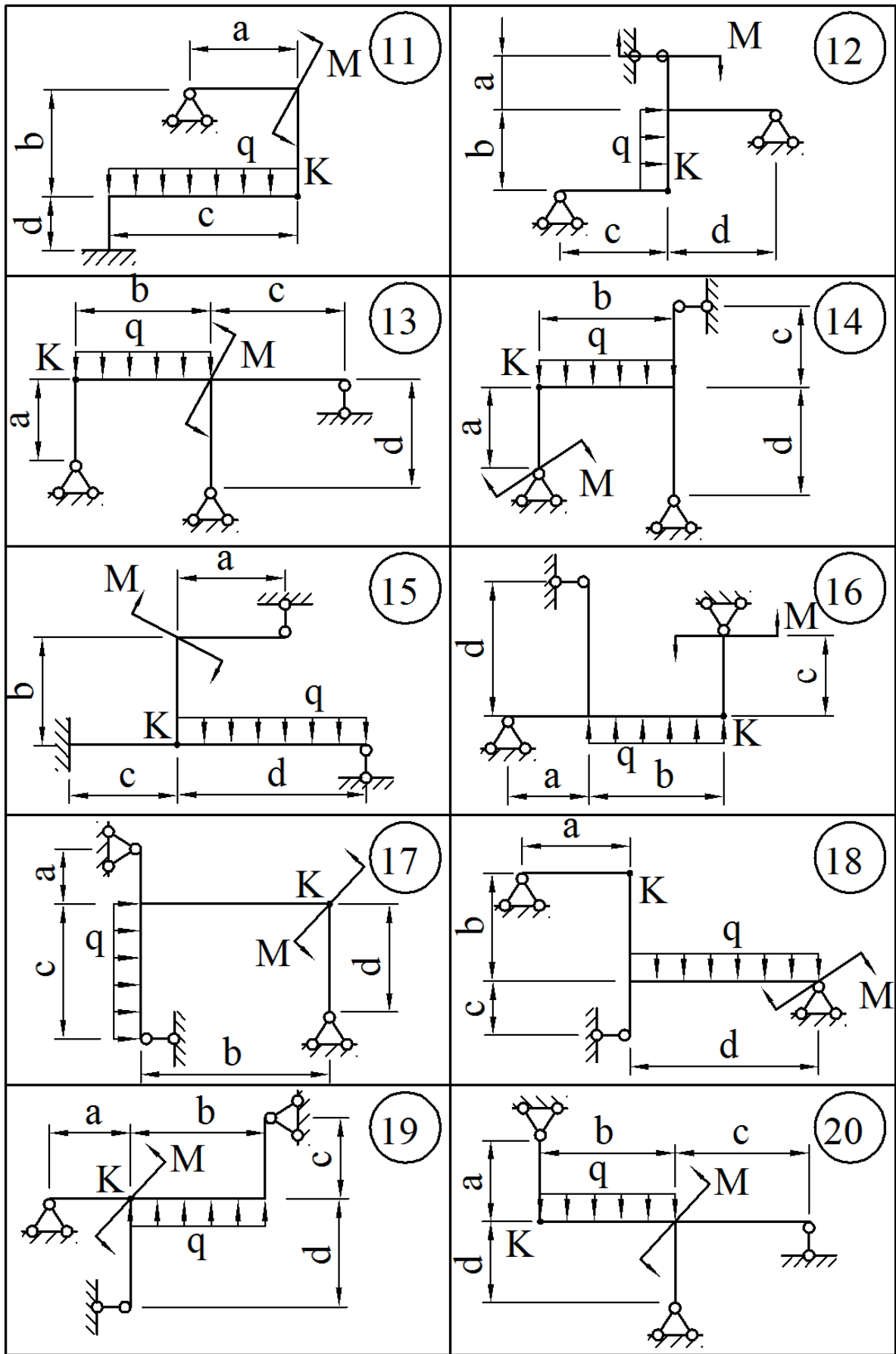


Рисунок 5.7, аркуш 2

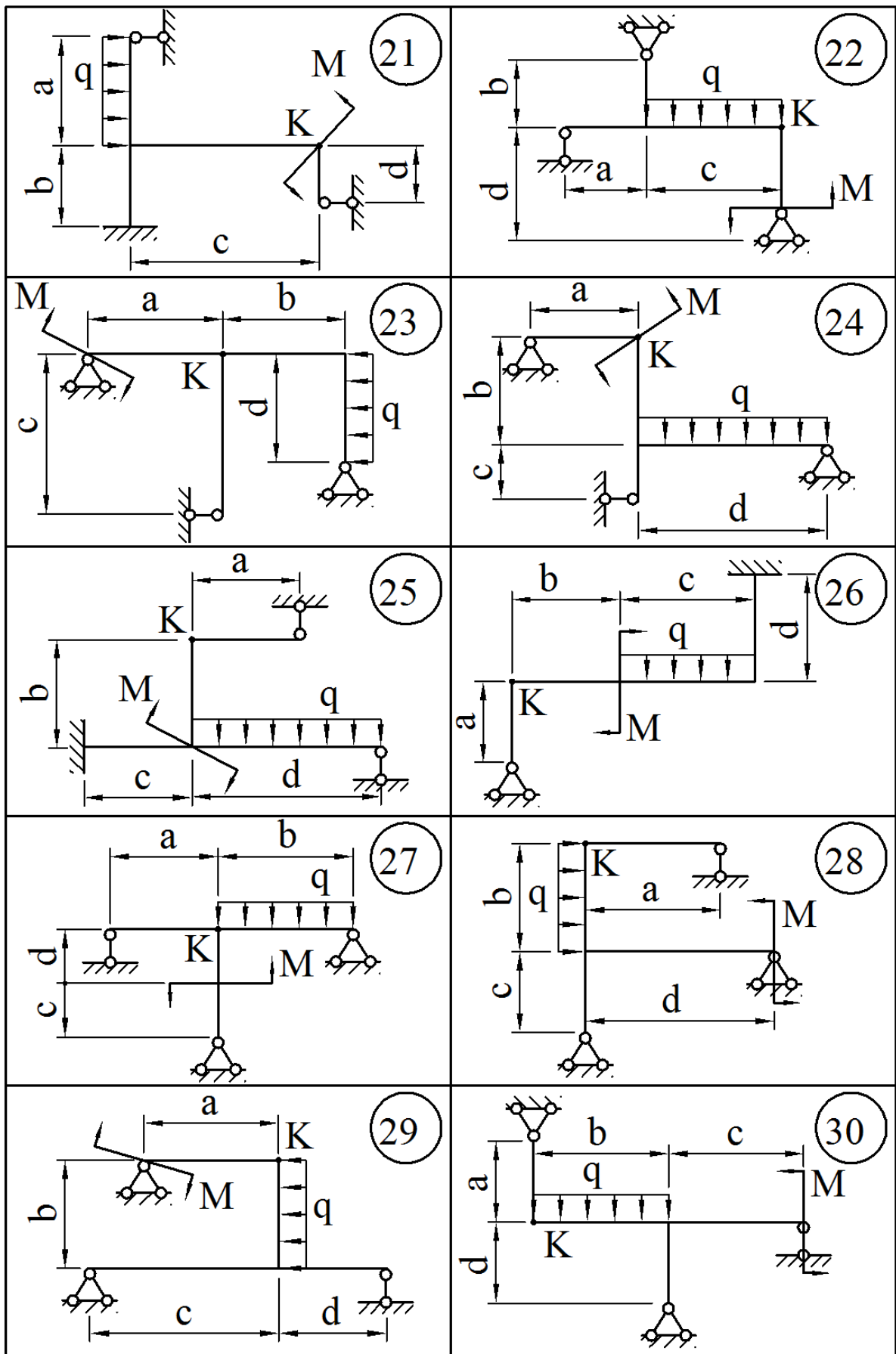


Рисунок 5.7, аркуш 3

5.3.1 Методичні вказівки до виконання задач 5.3 - 5.5

Статично невизначуваними системами називаються системи, у яких кількість зв'язків перевищує кількість рівнянь рівноваги.

Для розв'язання статично невизначуваних систем методом сил, у яких в якості невідомих виступають зусилля, необхідно:

- 1 Звільнити балку або раму від зв'язків, замінивши їх реакціями.
- 2 Провести аналіз або визначити ступінь статичної невизначуваності системи

$$S = n_R - n_y,$$

де S – ступінь статичної невизначуваності;

n_R – кількість невідомих зв'язків;

n_y – кількість можливих рівнянь рівноваги.

3 Вибрати основну систему шляхом відкидання «зайвих» зв'язків. Рекомендується основну систему вибрати якнайближче до вихідного, тобто відкидати ті зв'язки, без яких жорсткість системи зменшується не занадто сильно. Основна система повинна бути статично визначна і не повинна бути механізмом, тобто кількість зв'язків повинна дорівнювати кількості рівнянь рівноваги. При виборі основної системи необхідно тільки відкидати зв'язки і нічого не додавати або змінювати. Це єдине місце, де є можливість обирати, однак від вибору основної системи залежить кількість і якість обчислень.

4 Утворити еквівалентну систему, приклавши до основної системи усі відомі навантаження і реакції відкинутих зв'язків.

5 Скласти систему канонічних рівнянь методу сил:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2p} = 0; \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{np} = 0. \end{cases}$$

Кількість рівнянь у системі повинна відповідати ступеню статичної невизначуваності задачі, а кількість додатків на одиницю більше. Кожен з додатків у рівнянні є переміщенням від відомих або невідомих наванта-

жень у напрямку відкинутого зв'язку, при цьому переміщення від невідомих навантажень представлено як добуток переміщення від одиничного навантаження і невідомого навантаження.

6 Завантажити основну систему тільки зовнішніми навантаженнями, визначити опорні реакції і побудувати епюру згинальних моментів M_p («вантажну епюру»).

7 Завантажити основну систему тільки одним одиничним навантаженням у перерізі і напрямку першого відкинутого зв'язку, визначити опорні реакції і побудувати епюру згинальних моментів \overline{M}_1 («одиначну епюру»).

8 Пункт 7 повторити стільки разів, скільки невідомих реакцій.

9 Шляхом «перемножування» епюр визначити коефіцієнти канонічних рівнянь і вільні члени. При цьому зручно користуватися загальною формулою, одержаною при «перемножуванні» параболічної і прямолінійної трапецій.

10 Підставити обчислені значення в систему канонічних рівнянь і, розв'язуючи її, визначити реакції відкинутих зв'язків. На епюрі згинальних моментів максимальні значення моментів, як правило, зменшуються, а мінімальні збільшуються в порівнянні зі згинальними моментами на основній системі, навантаженій тільки відомими навантаженнями, тобто моменти по довжині стрижневої системи перерозподіляються більш рівномірно.

11 Виконати деформаційну перевірку, тобто визначити переміщення еквівалентної системи в напрямку відкинутого зв'язку. Для цього треба епюри згинальних моментів еквівалентної системи «помножити» по черзі на епюри згинальних моментів від одиничного навантаження. Визначити абсолютну похибку як різницю позитивних та від'ємних складових частин, визначити відносну похибку, поділивши абсолютну похибку на меншу складову частину, і порівняти її з допустимою.

12 З основної умови міцності при плоскому згинанні визначити необхідний момент опору перерізу, за яким визначити необхідні розміри перерізу.

13 Для визначення лінійного або кутового переміщення довільного перерізу треба в цьому перерізі прикласти до основної системи одиничну силу для визначення лінійного і одиничного моменту для визначення кутового переміщення, визначити опорні реакції, побудувати епюри згинальних моментів від одиничного фактору та «помножити» їх на епюру згинальних моментів для еквівалентної системи.

5.3.2 Приклад виконання задачі 5.3

Розкрити статичну невизначуваність рами (рис. 5.8, а), побудувати епюри повздовжніх, поперечних сил і згинальних моментів. Підібрати двотавровий переріз, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, визначити кут повороту вузла K .

Виконати деформаційну перевірку. Відносна похибка не повинна бути більшою за 2%.

Розв'язання

- 1 Відкидаємо зв'язки, замінивши їх реакціями (рис. 5.8, б).
- 2 Визначаємо ступінь статичної невизначуваності задачі:

$$S = 5 - 3 = 2.$$

Таким чином, задача двічі статично невизначувана.

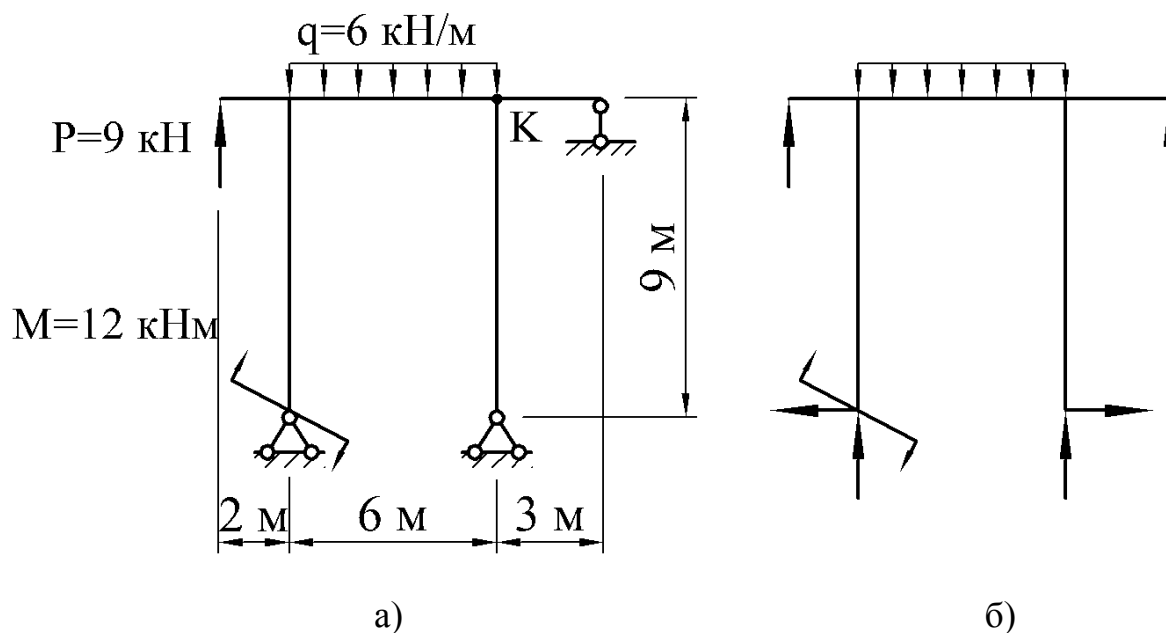


Рисунок 5.8

3 Вибираємо основну систему, виконавши вимоги до основної системи, тобто основна система повинна бути статично визначувана і не повинна бути механізмом (рис. 5.9, а).

Схеми, які представлені на рис. 5.9, б та 5.9, в не можна приймати як основні системи, тому що у першій системі всі реакції паралельні до вер-

тикальної осі і будь-яке навантаження в горизонтальному напрямку буде переміщати систему в цьому напрямку, а у другій системі всі реакції перерізаються в одній точці і будь-яке навантаження, що не проходить через цю точку, буде обертати систему навколо цієї точки.

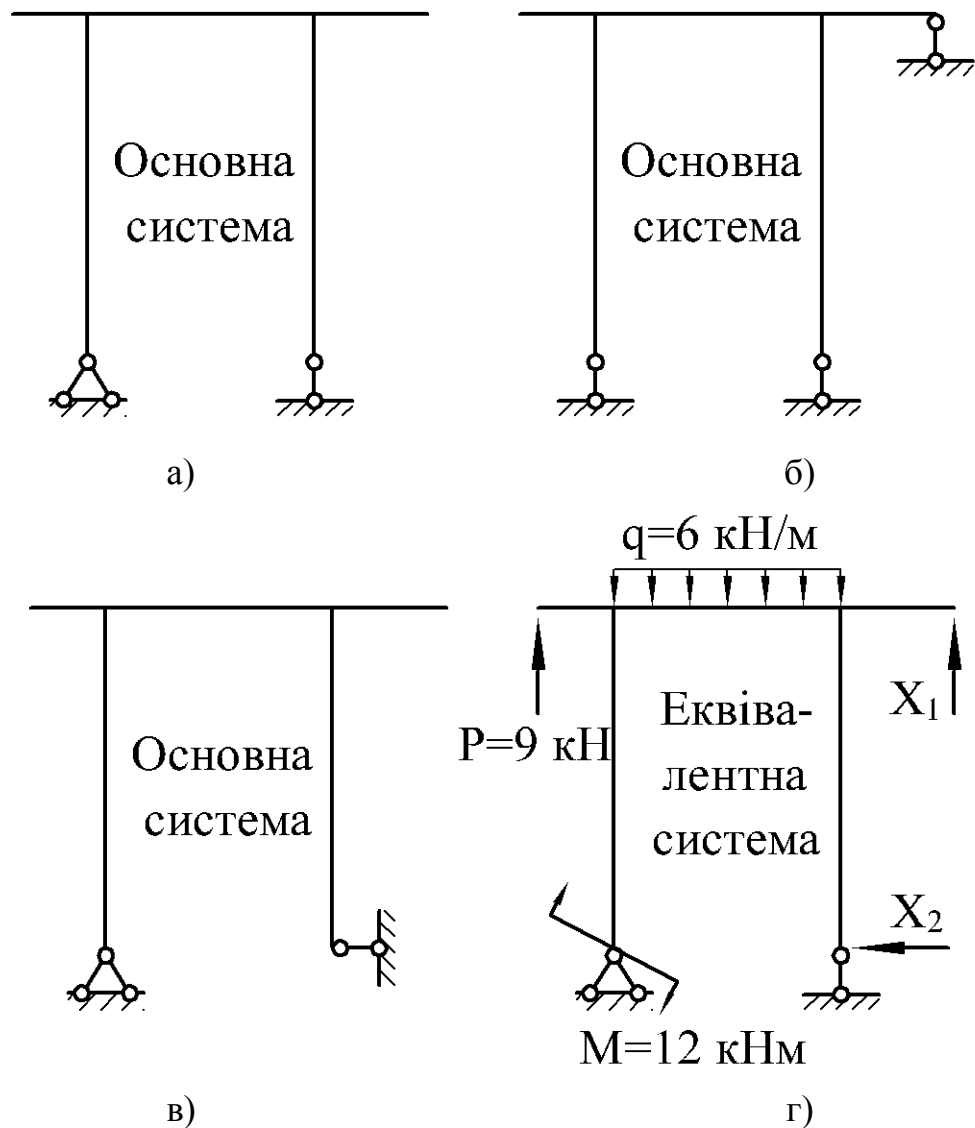


Рисунок 5.9

4 Одержуємо еквівалентну систему, завантажуючи основну систему заданим навантаженням та «зайвими невідомими зусиллями», що замінюють дію вилючених зв'язків (рис. 5.9, г).

5 Складемо систему канонічних рівнянь методу сил:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases}$$

6 Розглянемо основну систему, навантажену тільки заданим навантаженням (рис. 5.10, а).

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження (див. рис 5.10, а).

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0, \\ -M - P \cdot 2 - q \cdot 6 \cdot 3 + R_B \cdot 6 = 0, \\ R_B = \frac{M + P \cdot 2 + q \cdot 6 \cdot 3}{6} = \frac{12 + 9 \cdot 2 + 6 \cdot 6 \cdot 3}{6} = 23 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\sum P_z = 0,$$

$$-H_A = 0,$$

$$\sum P_y = 0,$$

$$R_A + R_B + P - q \cdot 6 = 0,$$

$$R_A = -R_B - P + q \cdot 6 = -23 - 9 + 6 \cdot 6 = 4 \text{ кН}.$$

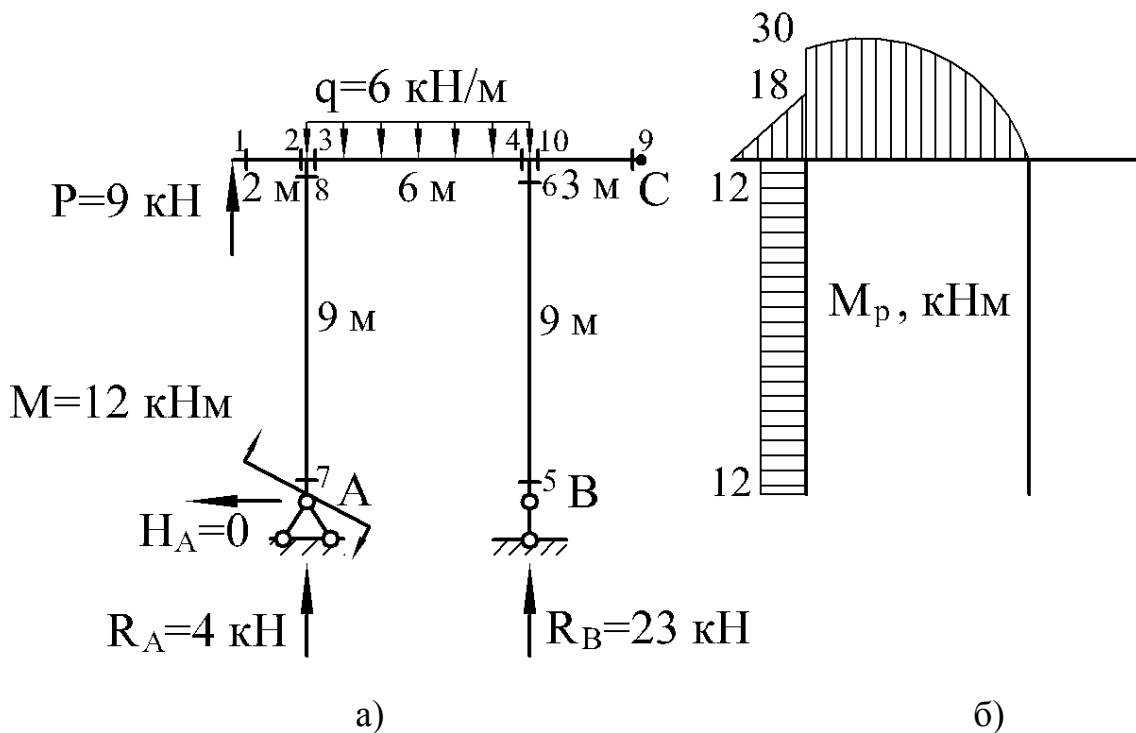


Рисунок 5.10

Для перевірки використаємо рівняння $\sum M_C = 0$.

$$\begin{aligned} -M - P \cdot 11 + q \cdot 6 \cdot 6 - R_A \cdot 9 - H_A \cdot 9 - R_B \cdot 3 &= 0, \\ -12 - 9 \cdot 11 + 6 \cdot 6 \cdot 6 - 4 \cdot 9 - 0 \cdot 9 - 23 \cdot 3 &= 0, \\ 216 - 216 &= 0. \end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження M_p , обчислюючи значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис 5.10, а):

$$\begin{aligned} M_1 &= 0 \text{ кНм}, \\ M_2 &= P \cdot 2 = 9 \cdot 2 = 18 \text{ кНм}, \\ M_3 &= P \cdot 2 + M = 9 \cdot 2 + 12 = 30 \text{ кНм}, \\ M_4 &= 0 \text{ кНм}, \\ M_5 &= M_6 = 0 \text{ кНм}, \\ M_7 &= M = 12 \text{ кНм}, \\ M_8 &= M + H_A \cdot 9 = 12 + 0 \cdot 9 = 12 \text{ кНм}, \\ M_9 &= M_{10} = 0 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії заданого навантаження по характерних перерізах (рис. 5.10, б).

Розглянемо основну систему, навантажену тільки одиничною силою X_1 (рис. 5.11, а).

Визначаємо опорні реакції від дії одиничної сили X_1 (рис. 5.11, а):

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0, \\ X_1 \cdot 9 - R_B \cdot 6 &= 0, \\ R_B &= \frac{X_1 \cdot 9}{6} = \frac{1 \cdot 9}{6} = 1,5, \\ \sum P_z &= 0, \\ H_A &= 0, \\ \sum P_y &= 0, \\ X_1 + R_A - R_B &= 0, \end{aligned}$$

$$R_A = R_B - X_1 = 1,5 - 1 = 0,5.$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum M_C = 0$.

$$-R_A \cdot 9 - H_A \cdot 9 + R_B \cdot 3 = 0,$$

$$-0,5 \cdot 9 - 0 \cdot 9 + 1,5 \cdot 3 = 0$$

$$4,5 - 4,5 = 0.$$

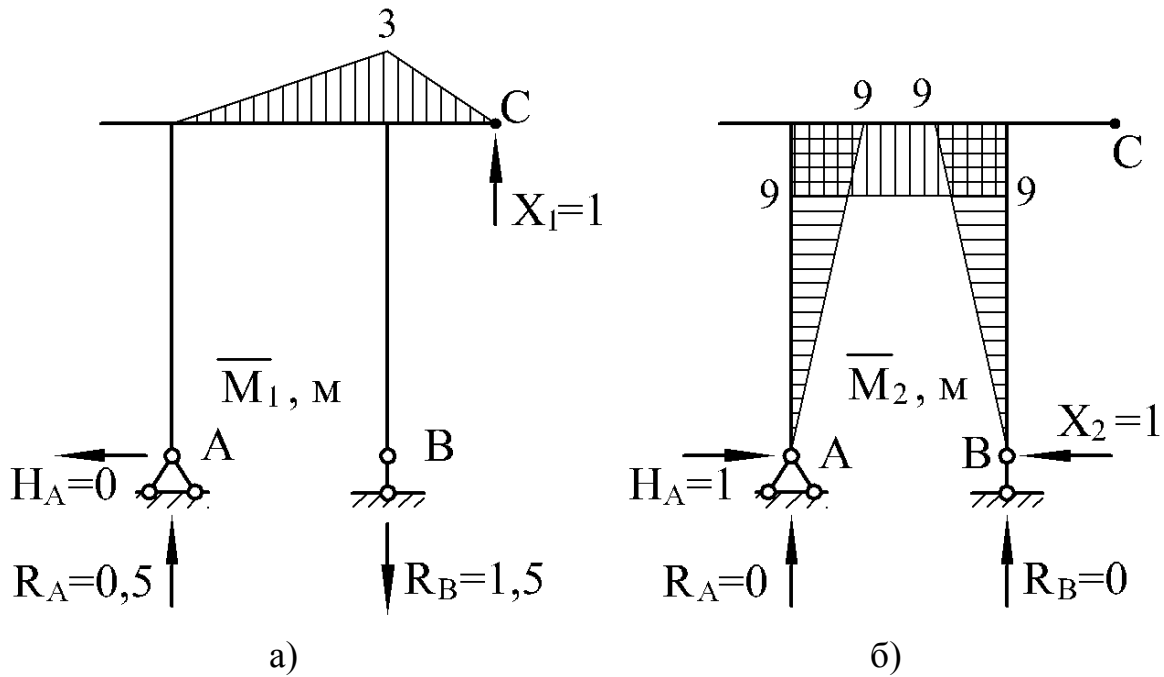


Рисунок 5.11

Будуємо епюру згинальних моментів від одиничної сили \overline{M}_1 , обчислюючи значення згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 5.11, а):

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_5 = M_6 = M_7 = M_8 = M_9 = 0 \text{ м},$$

$$M_4 = M_{10} = X_1 \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3 \text{ м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничної сили X_1 по характерних перерізах (див. рис. 5.11, а).

Розглянемо основну систему, навантажену тільки одиничною силою X_2 .

Визначаємо опорні реакції від дії одиничної сили X_2 (рис. 5.11, б):

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0, \\ R_B &= 0, \\ \sum P_z &=, \\ -X_2 + H_A &= 0, \\ H_A = X_2 &= 1, \\ \sum P_y &= 0, \\ R_A + R_B &= 0, \\ R_A = -R_B &= 0.\end{aligned}$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum M_C = 0$.

$$\begin{aligned}-R_A \cdot 9 + H_A \cdot 9 + R_B \cdot 3 - X_2 \cdot 9 &= 0, \\ -0 \cdot 9 + 1 \cdot 9 + 0 \cdot 3 - 1 \cdot 9 &= 0, \\ 9 - 9 &= 0.\end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від одиничної сили \overline{M}_2 , обчислюючи значення згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 5.11, б):

$$\begin{aligned}M_1 = M_2 = M_5 = M_7 = M_9 = M_{10} &= 0 \text{ м}, \\ M_3 = M_8 = H_A \cdot 9 = 1 \cdot 9 &= 9 \text{ м}, \\ M_4 = M_6 = X_2 \cdot 9 = 1 \cdot 9 &= 9 \text{ м}.\end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничної сили X_2 по характерних перерізах (рис. 5.11, б).

7 Визначаємо коефіцієнти канонічних рівнянь, перемножуючи відповідні епюри, використовуючи формулу крайніх ординат:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{6}{6EJ_X}(2 \cdot 3 \cdot 3) + \frac{3}{6EJ_X}(2 \cdot 3 \cdot 3) = \frac{27}{EJ_X}, \\ \delta_{22} &= \frac{9}{6EJ_X}(2 \cdot 9 \cdot 9) + \frac{6}{6EJ_X}(2 \cdot 9 \cdot 9 + 2 \cdot 9 \cdot 9 + 9 \cdot 9 + 9 \cdot 9) +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{9}{6EJ_X}(2 \cdot 9 \cdot 9) = \frac{972}{EJ_X}, \\
\delta_{12} = \delta_{21} &= \frac{6}{6EJ_X}(-2 \cdot 3 \cdot 9 - 3 \cdot 9) = \frac{-81}{EJ_X}, \\
\Delta_{1p} &= \frac{6}{6EJ_X}(30 \cdot 3) + \frac{6 \cdot 6^3}{24EJ_X}(0 + 3) = \frac{252}{EJ_X}, \\
\Delta_{2p} &= \frac{9}{6EJ_X}(-2 \cdot 12 \cdot 9 - 12 \cdot 9) + \frac{6}{6EJ_X}(-2 \cdot 30 \cdot 9 - 30 \cdot 9) + \\
& + \frac{6 \cdot 6^3}{24EJ_X}(-9 - 9) = \frac{-2268}{EJ_X}.
\end{aligned}$$

8 Перевіряємо правильність визначення коефіцієнтів канонічних рівнянь. Розглянемо основну систему, навантажену тільки одиничними силами X_1 та X_2 (рис. 5.12).

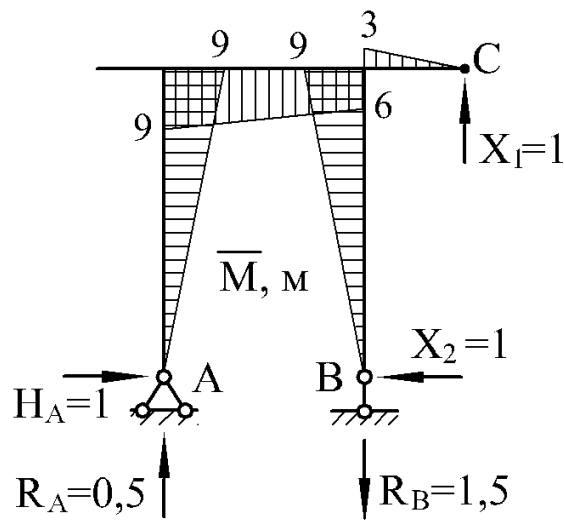


Рисунок 5.12

Визначаємо опорні реакції від дії одиничних сил X_1 та X_2 (див. рис. 5.12):

$$\begin{aligned}
\sum M_A &= 0, \\
X_1 \cdot 9 - R_B \cdot 6 &= 0, \\
R_B &= \frac{X_1 \cdot 9}{6} = \frac{1 \cdot 9}{6} = 1,5.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum P_z &= 0, \\ H_A - X_2 &= 0, \\ H_A = X_2 &= 1. \\ \sum P_y &= 0, \\ X_1 + R_A - R_B &= 0, \\ R_A = R_B - X_1 &= 1,5 - 1 = 0,5. \end{aligned}$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum M_C = 0$.

$$\begin{aligned} -R_A \cdot 9 - H_A \cdot 9 + R_B \cdot 3 - X_2 \cdot 9 &= 0, \\ -0,5 \cdot 9 - 1 \cdot 9 + 1,5 \cdot 3 - 1 \cdot 9 &= 0, \\ 13,5 - 13,5 &= 0. \end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від одиничних сил \overline{M} , обчислюючи значення згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 5.12):

$$\begin{aligned} M_1 = M_2 = M_5 = M_7 = M_9 &= 0 \text{ м}, \\ M_3 = M_8 &= -H_A \cdot 9 = -1 \cdot 9 = -9 \text{ м}, \\ M_4 &= -X_2 \cdot 9 + X_1 \cdot 3 = -1 \cdot 9 + 1 \cdot 3 = -6 \text{ м}, \\ M_6 &= X_2 \cdot 9 = 1 \cdot 9 = 9 \text{ м}, \\ M_{10} &= X_1 \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3 \text{ м}. \end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничних сил X_1 і X_2 по характерних перерізах (див. рис. 5.12).

Виконуємо перевірку правильності визначення коефіцієнтів δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} і δ_{22} :

$$\begin{aligned} \delta_{(1+2)(1+2)} &= \frac{9}{6EJ_X} (2 \cdot 9 \cdot 9) + \frac{6}{6EJ_X} (2 \cdot 9 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 6 + 9 \cdot 6 + 6 \cdot 9) + \\ &+ \frac{9}{6EJ_X} (2 \cdot 9 \cdot 9) + \frac{3}{6EJ_X} (2 \cdot 3 \cdot 3) = \frac{837}{EJ_X}, \\ \delta_{(1+2)(1+2)} &= \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \frac{27}{EJ_X} - \frac{81}{EJ_X} - \frac{81}{EJ_X} + \frac{972}{EJ_X} = \frac{837}{EJ_X}. \end{aligned}$$

Виходить, коефіцієнти δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} і δ_{22} визначені вірно.

Виконуємо перевірку правильності визначення коефіцієнтів Δ_{1p} та Δ_{2p} :

$$\begin{aligned}\Delta_{(1+2)p} &= \frac{9}{6EJ_X}(-2 \cdot 12 \cdot 9 - 12 \cdot 9) + \frac{6}{6EJ_X}(-2 \cdot 30 \cdot 9 - 30 \cdot 6) + \\ &\quad + \frac{6 \cdot 6^3}{24EJ_X}(-9 - 6) = \frac{-2016}{EJ_X}, \\ \Delta_{(1+2)p} &= \Delta_{1p} + \Delta_{2p} = \frac{252}{EJ_X} - \frac{2268}{EJ_X} = \frac{-2016}{EJ_X}.\end{aligned}$$

Отже, коефіцієнти Δ_{1p} та Δ_{2p} визначені вірно.

9 Підставляємо знайдені значення вантажних та одиничних коефіцієнтів в систему канонічних рівнянь:

$$\begin{cases} 27X_1 - 81X_2 + 252 = 0, \\ -81X_1 + 972X_2 - 2268 = 0. \end{cases}$$

Вирішуючи систему, знаходимо реакції відкинутих зв'язків:

$$X_1 = -3,11 \text{ кН}; \quad X_2 = 2,07 \text{ кН}.$$

10 Розглянемо еквівалентну систему, тобто статично визначувану основну систему, під дією заданого навантаження та знайдених сил $X_1 = 3,11 \text{ кН}$ та $X_2 = 2,07 \text{ кН}$ (рис. 5.13, а).

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження та сил $X_1 = 3,11 \text{ кН}$ та $X_2 = 2,07 \text{ кН}$ (див. рис. 5.13, а):

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0, \\ -M - P \cdot 2 - q \cdot 6 \cdot 3 - X_1 \cdot 9 + R_B \cdot 6 &= 0, \\ R_B &= \frac{M + P \cdot 2 + q \cdot 6 \cdot 3 + X_1 \cdot 9}{6} = \frac{12 + 9 \cdot 2 + 6 \cdot 6 \cdot 3 + 3,11 \cdot 9}{6} = 27,67 \text{ кН}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum P_z &= 0, \\ H_A - X_2 &= 0,\end{aligned}$$

$$H_A = X_2 = 2,07 \text{ кН.}$$

$$\sum P_y = 0,$$

$$R_A + R_B + P - q \cdot 4 - X_1 = 0,$$

$$R_A = -R_B - P + q \cdot 6 + X_1 = -27,67 - 9 + 6 \cdot 6 + 3,11 = 2,44 \text{ кН.}$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum M_C = 0$.

$$-M - P \cdot 11 + q \cdot 6 \cdot 6 - R_A \cdot 9 + H_A \cdot 9 - R_B \cdot 3 - X_2 \cdot 9 = 0,$$

$$-12 - 9 \cdot 11 + 6 \cdot 6 \cdot 6 - 2,44 \cdot 9 + 2,07 \cdot 9 - 27,67 \cdot 3 - 2,07 \cdot 9 = 0,$$

$$234,6 - 234,6 = 0.$$

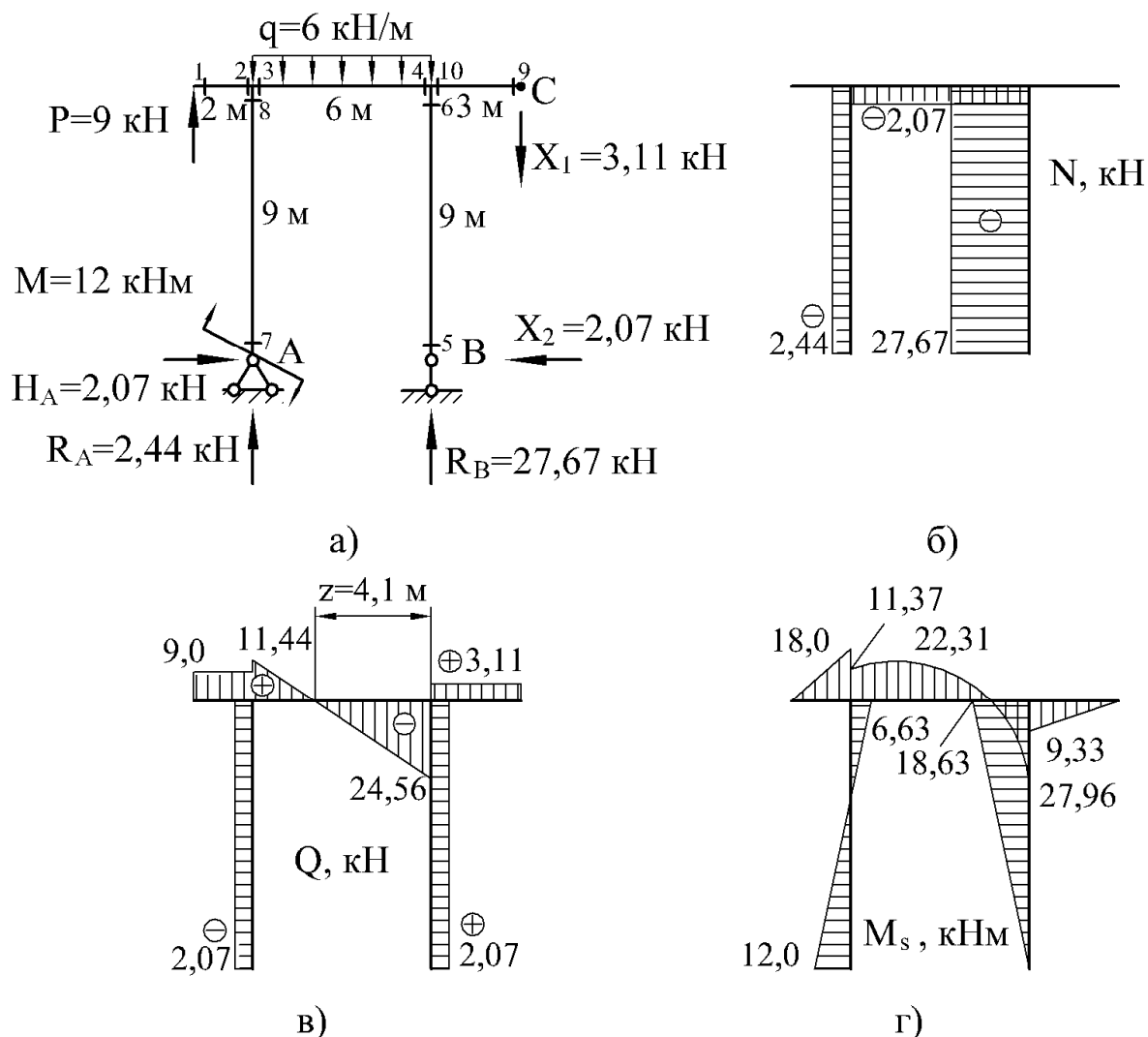


Рисунок 5.13

Будуємо остаточні епюри внутрішніх силових факторів.

Обчислюємо значення поздовжніх сил у характерних перерізах:

$$\begin{aligned}N_1 &= N_2 = N_9 = N_{10} = 0 \text{ кН}, \\N_3 &= N_4 = -H_A = -2,07 \text{ кН}, \\N_5 &= N_6 = -R_B = -27,67 \text{ кН}, \\N_7 &= N_8 = -R_A = -2,44 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Обчислюємо значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$\begin{aligned}Q_1 &= Q_2 = P = 9 \text{ кН}, \\Q_3 &= P + R_A = 9 + 2,44 = 11,44 \text{ кН}, \\Q_4 &= P + R_A - q \cdot 6 = 9 + 2,44 - 6 \cdot 6 = -24,56 \text{ кН}, \\Q_5 &= Q_6 = X_2 = 2,07 \text{ кН}, \\Q_7 &= Q_8 = -H_A = -2,07 \text{ кН}, \\Q_9 &= Q_{10} = X_1 = 3,11 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$\begin{aligned}M_1 &= 0 \text{ кНм}, \\M_2 &= P \cdot 2 = 9 \cdot 2 = 18 \text{ кНм}, \\M_3 &= P \cdot 2 + M - H_A \cdot 9 = 9 \cdot 2 + 12 - 2,07 \cdot 9 = 11,37 \text{ кНм}, \\M_4 &= -X_1 \cdot 3 - X_2 \cdot 9 = -3,11 \cdot 3 - 2,07 \cdot 9 = -27,96 \text{ кНм}, \\M_5 &= 0 \text{ кНм}, \\M_6 &= -X_2 \cdot 9 = -2,07 \cdot 9 = -18,63 \text{ кНм}, \\M_7 &= M = 12 \text{ кНм}, \\M_8 &= M - H_A \cdot 9 = 12 - 2,07 \cdot 9 = -6,63 \text{ кНм}, \\M_9 &= 0 \text{ кНм}, \\M_{10} &= -X_1 \cdot 3 = -3,11 \cdot 3 = -9,33 \text{ кНм}.\end{aligned}$$

Будуємо епюри поздовжніх сил N (рис. 5.13, б), поперечних сил Q (рис. 5.13, в), а також згинальних моментів M_s (рис. 5.13, г) по характерних перерізах.

Так як еюра поперечних сил пересікає базову лінію та міняє знак з «+» на «-», те в цій точці перебуває максимальне значення згинального моменту. Знаходимо положення цього перерізу.

$$z = \frac{24,56}{6} = 4,1 \text{ м},$$

$$\begin{aligned} M_z &= -X_1 \cdot 7,1 - X_2 \cdot 9 + R_B \cdot 4,1 - q \cdot 4,1 \cdot \frac{4,1}{2} = \\ &= -3,11 \cdot 7,1 - 2,07 \cdot 9 + 27,67 \cdot 4,1 - 6 \cdot 4,1 \cdot \frac{4,1}{2} = 22,31 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

11 Виконуємо деформаційну перевірку.

Так як в заданій статично невизначуваній системі переміщення по напрямку X_1 дорівнює нулю, то добуток остаточної еюри згинальних моментів M_s на епюру \overline{M}_1 повинен рівнятися нулю, тобто $\Delta_{1s} = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta_{1s} &= \frac{6}{6EJ_x} (-2 \cdot 27,96 \cdot 3 + 11,37 \cdot 3) + \frac{6 \cdot 6^3}{24EJ_x} (0 + 3) + \frac{3}{6EJ_x} (-2 \cdot 9,33 \cdot 3) = \\ &= \frac{-133,65 + 162 - 27,99}{EJ_x} = \frac{162,0 - 161,6}{EJ_x}. \end{aligned}$$

При цьому похибка склала:

$$\frac{162,0 - 161,6}{161,6} \cdot 100\% = 0,2 \text{ \%}.$$

Так як в заданій статично невизначуваній системі переміщення по напрямку X_2 дорівнює нулю, то добуток остаточної еюри згинальних моментів M_s на епюру \overline{M}_2 повинен рівнятися нулю, тобто $\Delta_{2s} = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta_{2s} &= \frac{9}{6EJ_x} (2 \cdot 6,63 \cdot 9 - 12 \cdot 9) + \\ &+ \frac{6}{6EJ_x} (-2 \cdot 11,37 \cdot 9 + 2 \cdot 27,96 \cdot 9 - 11,37 \cdot 9 + 27,96 \cdot 9) + \frac{6 \cdot 6^3}{24EJ_x} (-9 - 9) + \end{aligned}$$

$$+\frac{9}{6EJ_x}(2 \cdot 18,63 \cdot 9) = \frac{17,0 + 447,9 - 972,0 + 503,0}{EJ_x} = \frac{967,9 - 972,0}{EJ_x}.$$

При цьому похибка склала:

$$\frac{972,0 - 967,9}{967,9} \cdot 100\% = 0,4\%.$$

12 Підбираємо поперечний переріз у вигляді двотавра.

При зазначеному навантаженні небезпечним перерізом є переріз 4, для якого $M_{\max} = M_4 = 27,96$ кНм.

Так як осьова сила незначна, то розміри перерізу підбираємо з умови міцності на згинання:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Визначимо необхідний момент опору перерізу:

$$W_x \geq \frac{27,96 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^6 = 174,8 \text{ см}^3.$$

Номер двотавра знаходимо за розрахунковим значенням моменту опору $W_x \geq 174,8 \text{ см}^3$. По таблиці сортаменту (ДСТУ 8239-72) вибираємо двотавр № 20, для якого $W_x = 184 \text{ см}^3$, $J_x = 1840 \text{ см}^4$.

15 Визначаємо кут повороту вузла K .

Для цього до основної системи в перерізі K прикладаємо одиничний момент, тобто $M = 1$ (рис. 5.14).

Визначаємо опорні реакції від дії одиничного моменту:

$$H_A = 0,$$

$$R_A = R_B = \frac{M}{6} = \frac{1}{6} = 0,17.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах від дії одиничного моменту (див. рис. 5.14):

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_5 = M_6 = M_7 = M_8 = M_9 = M_{10} = 0,$$

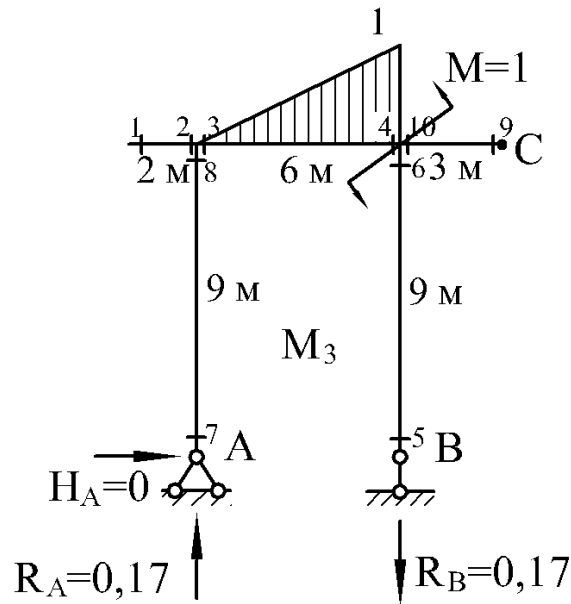


Рисунок 5.14

$$M_4 = M = 1.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту по характерних перерізах (див. рис. 5.14).

З використанням формули крайніх ординат «перемножуємо між собою» на кожній ділянці остаточну епюру згинальних моментів M_s та епюру від дії одиничного моменту \overline{M}_3 :

$$\theta_K = \Delta_{3s} = \frac{6}{6EJ_x} (-2 \cdot 27,96 \cdot 1 + 11,37 \cdot 1) + \frac{6 \cdot 6^3}{24EJ_x} (0 + 1) = \frac{9,45}{EJ_x}.$$

Кут повороту вузла K дорівнює:

$$\theta_K = \frac{9,45 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 0,0026 \text{ рад.}$$

Допустимий кут повороту перерізу дорівнює:

$$[\theta] = 2^\circ = 0,0349 \text{ рад.}$$

Так як кут повороту вузла K менше, ніж допустимий кут повороту, то жорсткість рами забезпечена.

5.4 Двічі статично невизначувана балка

Для нерозрізної балки розкрити статичну невизначеність, побудувати епюри внутрішніх зусиль, якщо $[\sigma]=160$ МПа, підібрати двотавровий переріз і визначити прогин у точці K і кут повороту перерізу A .

Вихідні дані вибрати із таблиць 5.3 та 5.4 і рисунку 5.15.

5.4.1 Приклад розв'язання задачі 5.4

Для нерозрізної балки (рис. 5.16, а) розкрити статичну невизначеність, побудувати епюри внутрішніх зусиль, якщо $[\sigma]=160$ МПа, підібрати двотавровий переріз і визначити прогин у точці K і кут повороту перерізу A .

Виконати деформаційну перевірку. Відносна похибка не повинна бути більшою за 2%.

Розв'язання

1 Встановлюємо ступінь статичної невизначуваності системи (рис. 5.16, а). Дана система два рази статично невизначувана.

2 Вибираємо основну систему. Проміжні опори заміняємо врізаними шарнірами (рис. 5.16, б).

3 Одержуємо еквівалентну систему, завантажуючи основну систему заданим навантаженням і невідомими згинальними моментами X_1 та X_2 (рис. 5.16, в). Таким чином, еквівалентна система являє собою три прості шарнірно обперті балки, навантажені заданим навантаженням і невідомими згинальними моментами X_1 та X_2 , що заміняють відкинуті зв'язки між сусідніми прольотами.

4 Для того, щоб визначити невідомі згинальні моменти X_1 та X_2 , скористаємося системою канонічних рівнянь:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases}$$

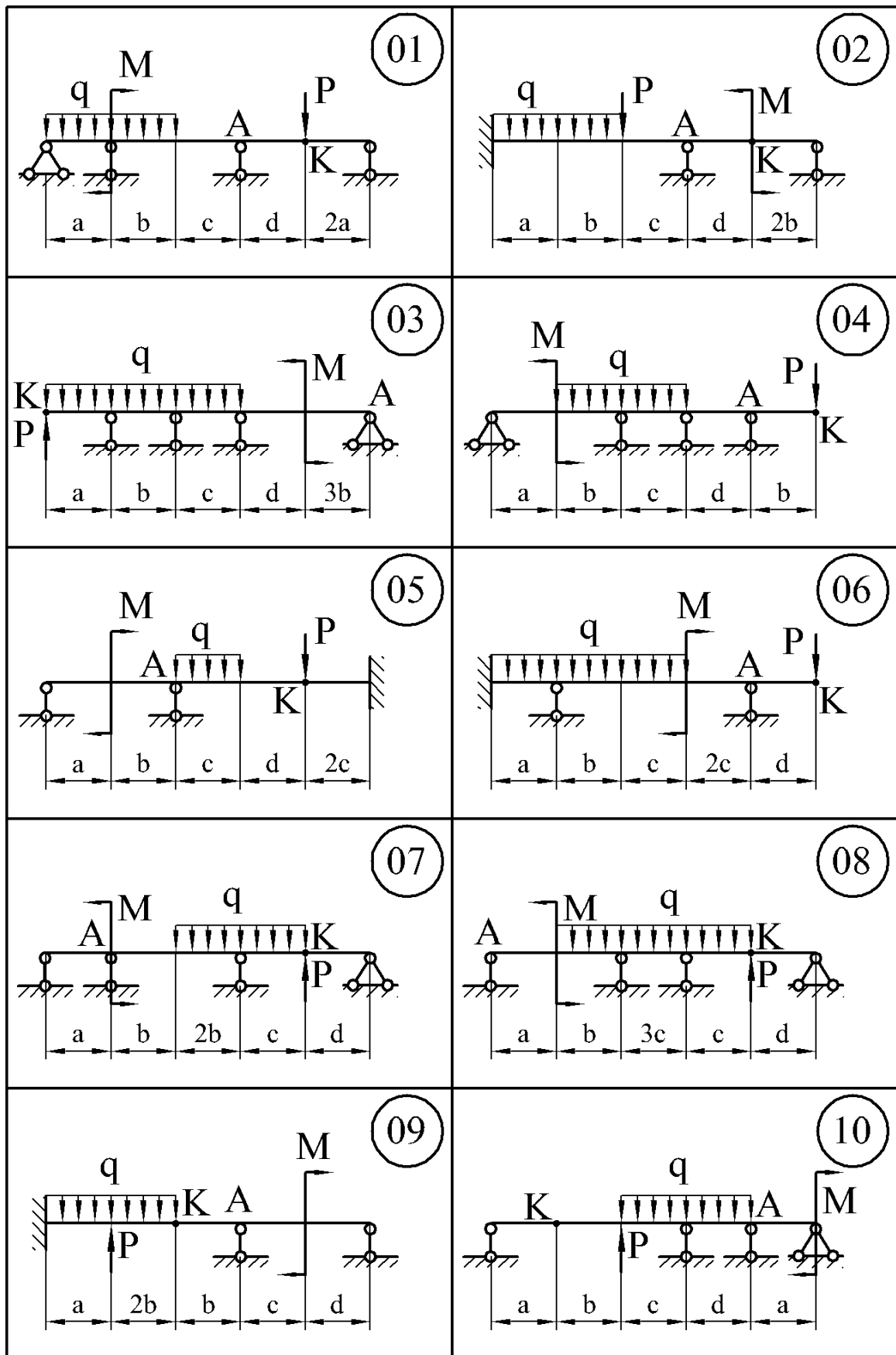


Рисунок 5.15

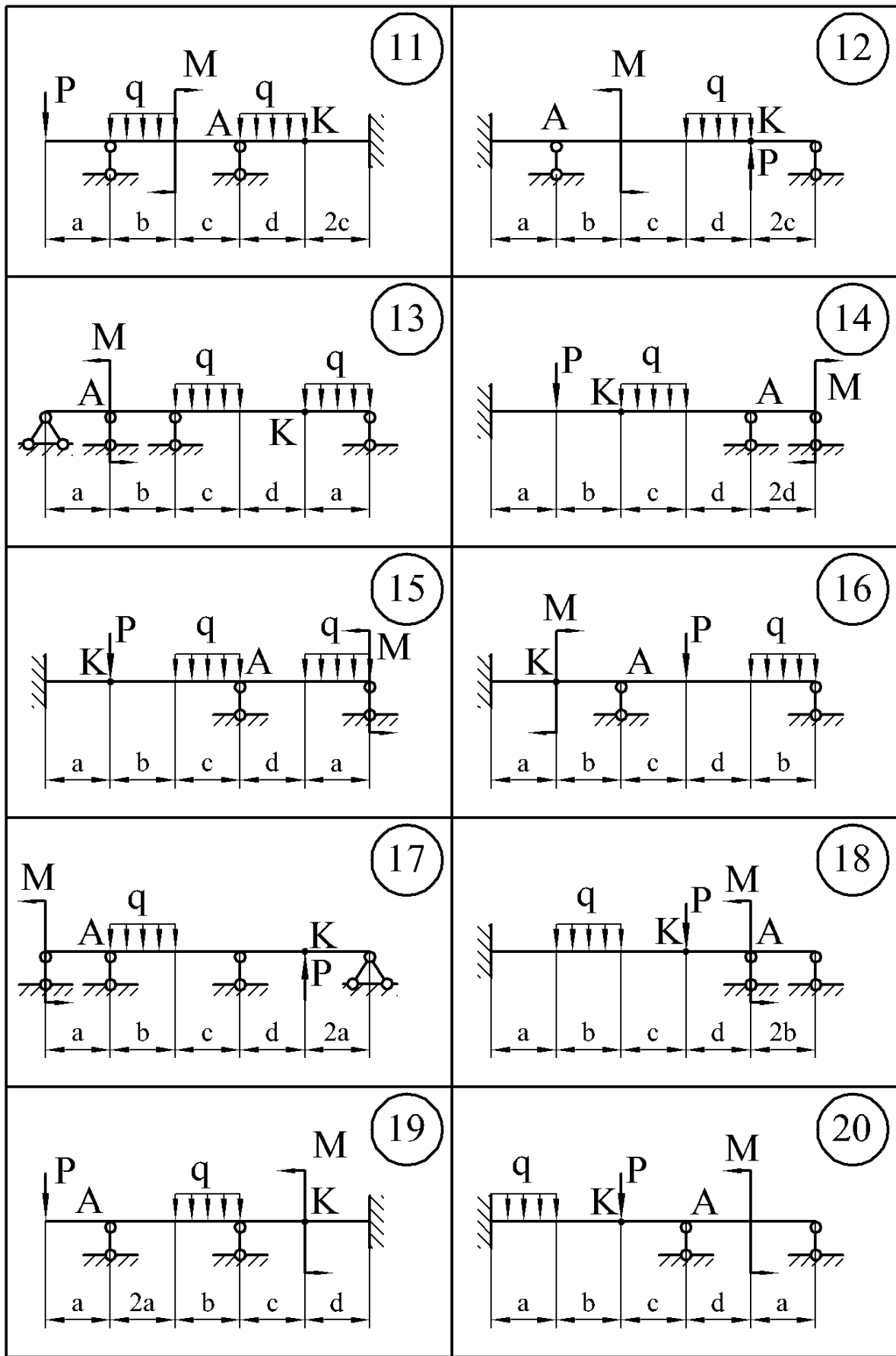


Рисунок 5.15, аркуш 2

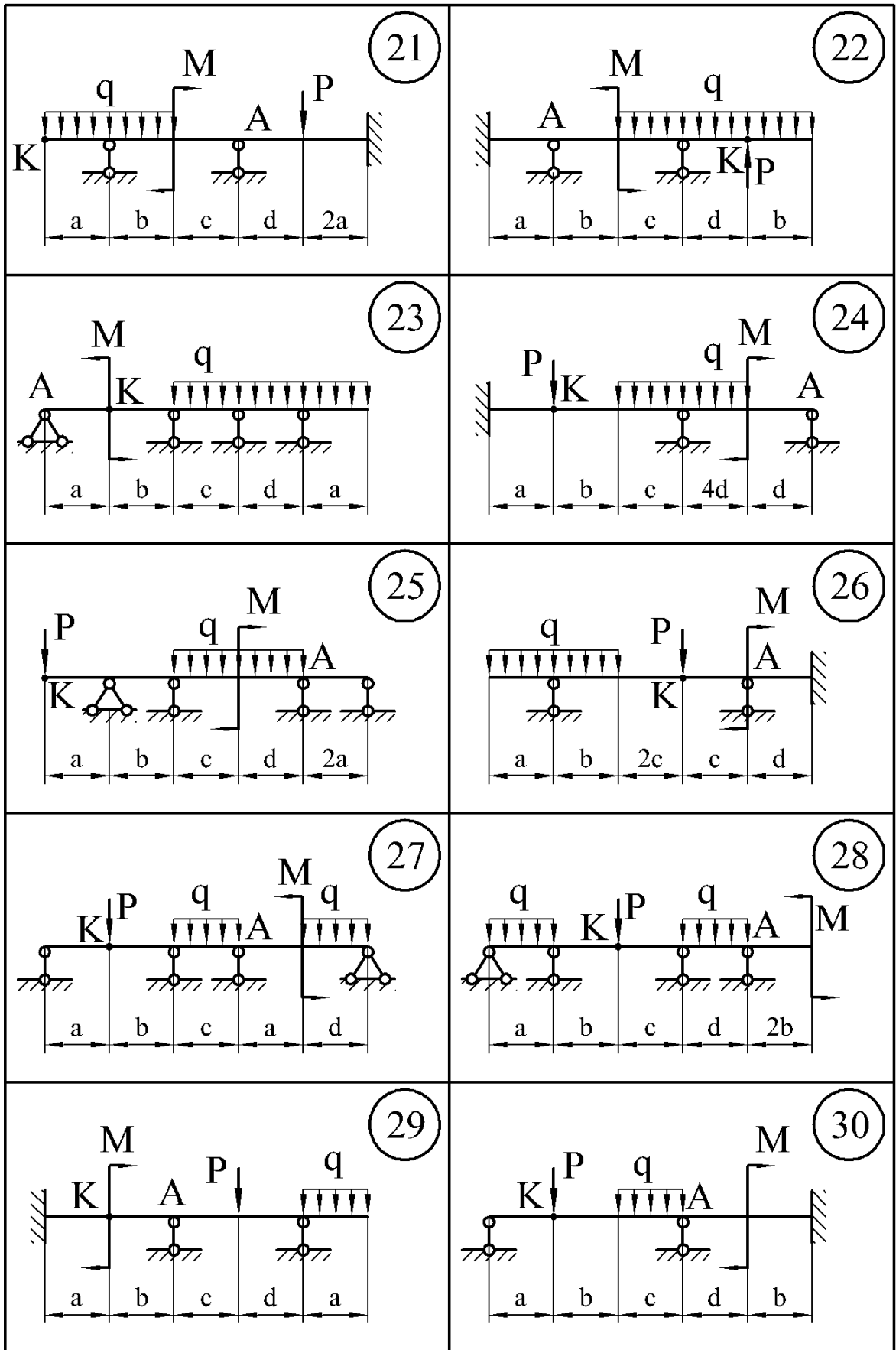


Рисунок 5.15, аркуш 3

5 Розглянемо основну систему, навантажену тільки заданим навантаженням (рис. 5.16, г). Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження та будуємо епюру згинальних моментів від дії заданого навантаження по характерних перерізах (рис. 5.16, д).

6 Розглянемо основну систему, навантажену тільки моментом $X_1 = 1$ (рис. 5.16, е) та будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту $X_1 = 1$ по характерних перерізах (див. рис. 5.16, е). Аналогічним чином отримуємо епюру від згинальних моментів $X_2 = 1$ (рис. 5.16, є).

7 Визначаємо коефіцієнти системи канонічних рівнянь, перемножуючи відповідні епюри, використовуючи формулу крайніх ординат:

$$\delta_{11} = \frac{3}{6EJ_X}(2 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{2}{6EJ_X}(2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{1,67}{EJ_X},$$

$$\delta_{22} = \frac{2}{6EJ_X}(2 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{1}{6EJ_X}(2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{1,00}{EJ_X},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{2}{6EJ_X}(1 \cdot 1) = \frac{0,33}{EJ_X},$$

$$\Delta_{1p} = \frac{10 \cdot 3^3}{24EJ_X}(0 + 1) + \frac{2}{6EJ_X}(2 \cdot 15 \cdot 1) = \frac{21,25}{EJ_X},$$

$$\Delta_{2p} = \frac{2}{6EJ_X}(15 \cdot 1) + \frac{1}{6EJ_X}(-12 \cdot 1) = \frac{3}{EJ_X}.$$

8 Підставляємо коефіцієнти в канонічні рівняння, з рішення яких знаходимо X_1 та X_2 :

$$\begin{cases} 1,67X_1 + 0,33X_2 + 21,25 = 0, \\ 0,33X_1 + X_2 + 3 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = -12,99 \text{ кНм}, \\ X_2 = 1,29 \text{ кНм}. \end{cases}$$

9 До кожної з балок прикладаємо задане навантаження і знайдемо момент (рис. 5.17, а). Від них визначаємо реакції опор і будуємо епюри поперечних сил (рис. 5.17, б) і згинальних моментів (рис. 5.17, в).

10 Виконуємо деформаційну перевірку. Так як в заданій статично невизначуваній системі взаємний кут повороту на проміжних опорах дорі-

внює нулю, то добуток остаточної епюри згинальних моментів M_s на епюри M_1 та M_2 повинен рівнятися нулю, тобто $\Delta_{1s} = 0$ та $\Delta_{2s} = 0$.

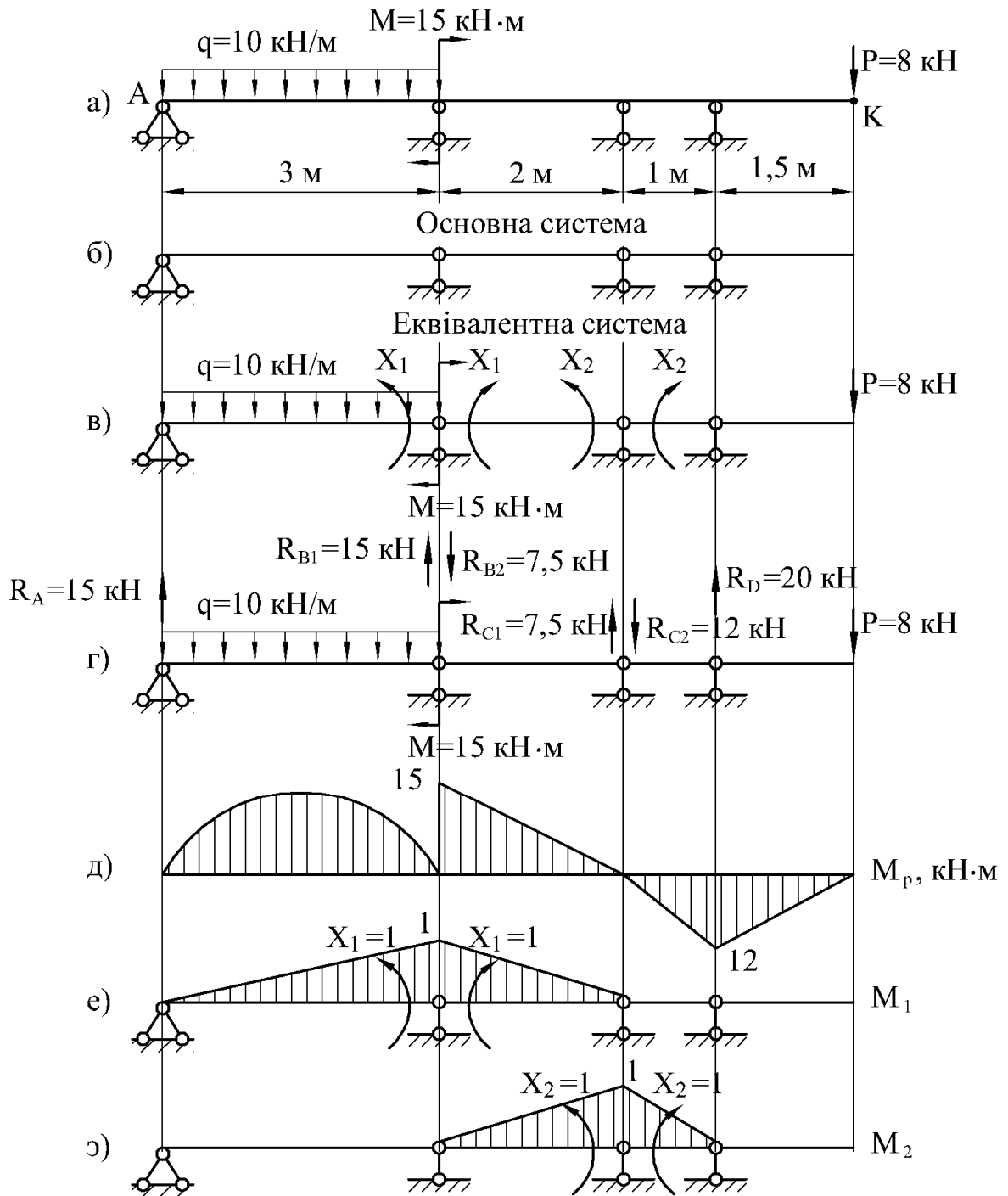


Рисунок 5.16

$$\Delta_{1s} = \frac{3}{6EJ_x}(-2 \cdot 12,99 \cdot 1) + \frac{10 \cdot 3^3}{24EJ_x}(0+1) + \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 2,01 \cdot 1 + 1,29 \cdot 1) =$$

$$= \frac{-12,99 + 11,25 + 1,78}{EJ_x} = \frac{-12,99 + 13,03}{EJ_x}.$$

При цьому похибка склала:

$$\frac{13,03 - 12,99}{12,99} \cdot 100\% = 0,3\%.$$

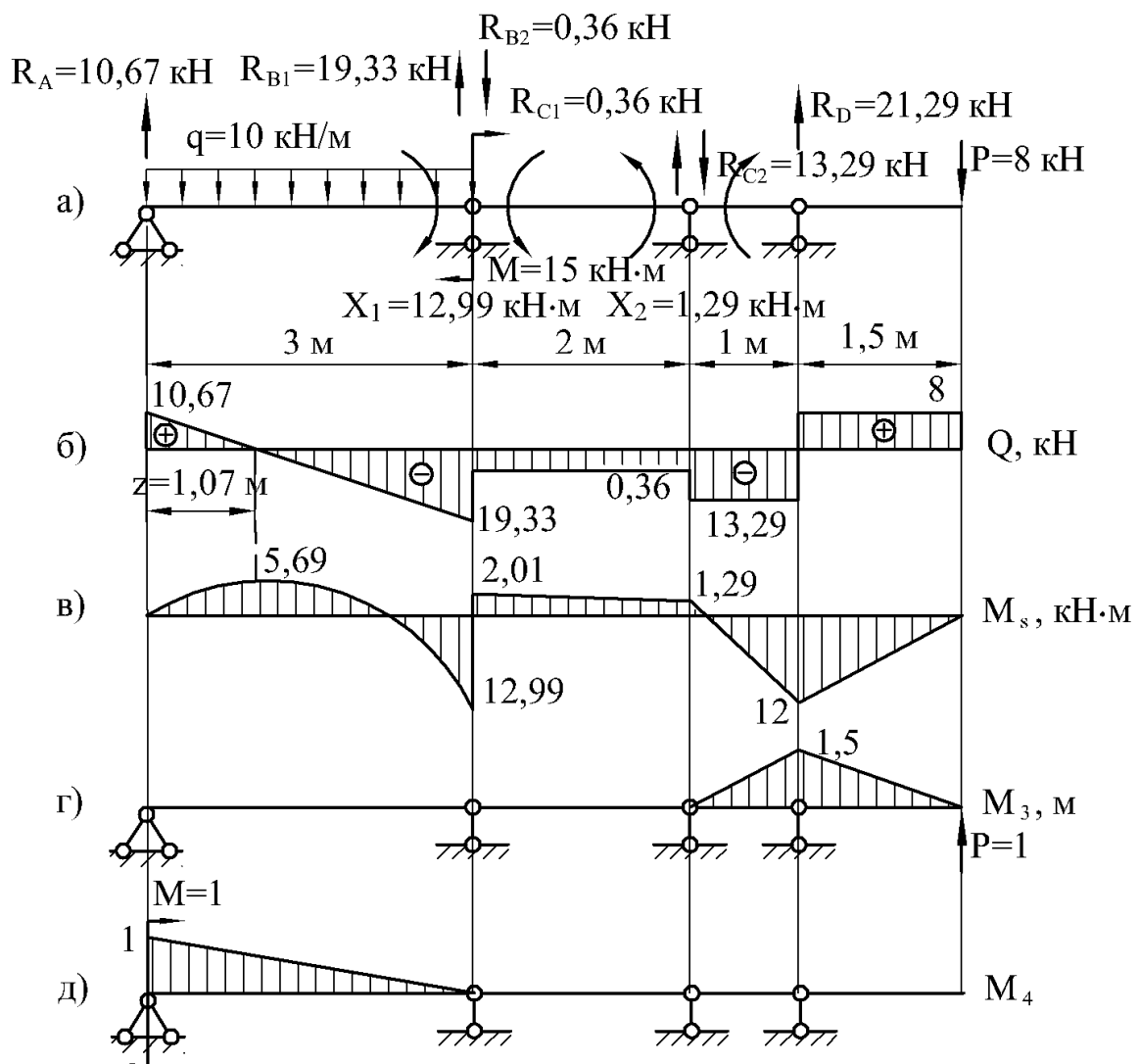


Рисунок 5.17

$$\Delta_{2s} = \frac{2}{6EJ_X}(2 \cdot 1,29 \cdot 1 + 2,01 \cdot 1) + \frac{1}{6EJ_X}(2 \cdot 1,29 \cdot 1 - 12 \cdot 1) = \frac{1,54 - 1,56}{EJ_X}.$$

При цьому похибка склала:

$$\frac{1,54 - 1,56}{1,54} \cdot 100\% = 1,2\%.$$

11 З епюри згинальних моментів (див. рис. 5.17, в) знаходимо небезпечний переріз, для якого $M_{\max} = 12,99$ кНм.

З умови міцності:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_X} \leq [\sigma];$$

$$W_X \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{12,99 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^6 = 81,2 \text{ см}^3.$$

Номер двотавра знаходимо за розрахунковим значенням моменту опору $W_X \geq 81,2 \text{ см}^3$. По таблиці сортаменту вибираємо двотавр № 14, для якого $W_X = 81,7 \text{ см}^3$, $J_X = 572 \text{ см}^4$.

12 Визначаємо прогин в точці K . Для цього до основної системи в точці K прикладаємо одиничну силу і будуємо епюру згинальних моментів (рис. 5.17, г), яку помножуємо на епюру M_s (рис. 5.17, в).

$$y_K = \frac{1}{6EJ_X}(-2 \cdot 12 \cdot 1,5 + 1,29 \cdot 1,5) + \frac{1,5}{6EJ_X}(-2 \cdot 12 \cdot 1,5) = \frac{-14,68}{EJ_X} =$$

$$= \frac{-14,68 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 0,013 \text{ м}.$$

Допустимий прогин балки довжиною $\ell = 7,5$ м дорівнює:

$$[y] = \frac{\ell}{200} = \frac{7,5}{200} = 0,036 \text{ м}.$$

Знак «мінус» вказує на те, що точка K переміщається по напрямку, який протилежний напрямку одиничної сили, тобто вниз.

13 Визначення кута повороту. У перерізі A прикладаємо одиничний момент, від нього будуюмо епюру згинальних моментів (рис. 5.17, д), яку помножуємо на епюру M_s (рис. 5.17, в)

$$\theta_A = \frac{3}{6EJ_x}(-12,99 \cdot 1) = \frac{-6,50}{EJ_x} = \frac{-6,50 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = -0,0056 \text{ рад.}$$

Допустимий кут повороту перерізу дорівнює:

$$[\theta] = 2^\circ = 0,0349 \text{ рад.}$$

Знак «мінус» вказує на те, що переріз A повертається у напрямі, який протилежний напрямку одиничного моменту.

5.5 Тричі статично невизначувана балка

Для нерозрізної балки розкрити статичну невизначуваність, побудувати епюри внутрішніх зусиль, підібрати двотавровий переріз, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, визначити прогин у точці K та кут повороту перерізу A .

Вихідні дані вибрати із таблиць 5.5 та 5.6 і рисунку 5.18.

Таблиця 5.5 – Вихідні дані до задачі 5.5

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a, \text{ м}$	1,5	1,7	1,9	2,1	2,2	2,4	2,6	1,3	1,1	2,8
$b, \text{ м}$	2,9	2,7	2,5	2,1	1,9	1,7	1,6	1,2	1,2	1,2
$c, \text{ м}$	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,6	2,8	1,4
$d, \text{ м}$	3,0	2,8	2,6	2,4	2,2	2,0	1,8	2,0	1,4	2,2

Таблиця 5.6 – Вихідні дані до задачі 5.5

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M , кН·м	8	6	10	4	6	6	9	10	8	12
P , кН	6	8	4	6	8	4	6	8	4	6
q , кН/м	10	12	14	12	14	10	12	10	14	10

5.5.1 Приклад розв'язання задачі 5.5

Для нерозрізної балки розкрити статичну невизначуваність (рис. 5.19, а), побудувати епюри внутрішніх зусиль, підібрати двотавровий переріз, якщо $[\sigma]=160$ МПа, визначити прогин у точці K та кут повороту перерізу A .

Виконати деформаційну перевірку. Відносна похибка не повинна бути більшою за 2%.

Розв'язання

1 Встановлюємо ступінь статичної невизначуваності системи (рис. 5.19, а). Дана система три рази статично невизначувана.

2 Вибираємо основну систему. Жорстке закріплення (затиснення) заміняємо нерухомим шарніром, а проміжні опори заміняємо врізаними (див. рис. 5.19, б). Врізання шарніру між перерізами 8 і 9 буде помилкою, бо це крайня опора. Обрана таким чином основна система розіб'є складну балку на ряд простих балок, спростить побудову епюр згинальних моментів і скоротить обсяг обчислень, тому що в кожному рівнянні залишається не більше трьох невідомих. Для заданої задачі складна балка поділиться на три простих OB , CD , EF . Щоб не дуже навантажувати рисунки характерні перерізи показано на основній системі.

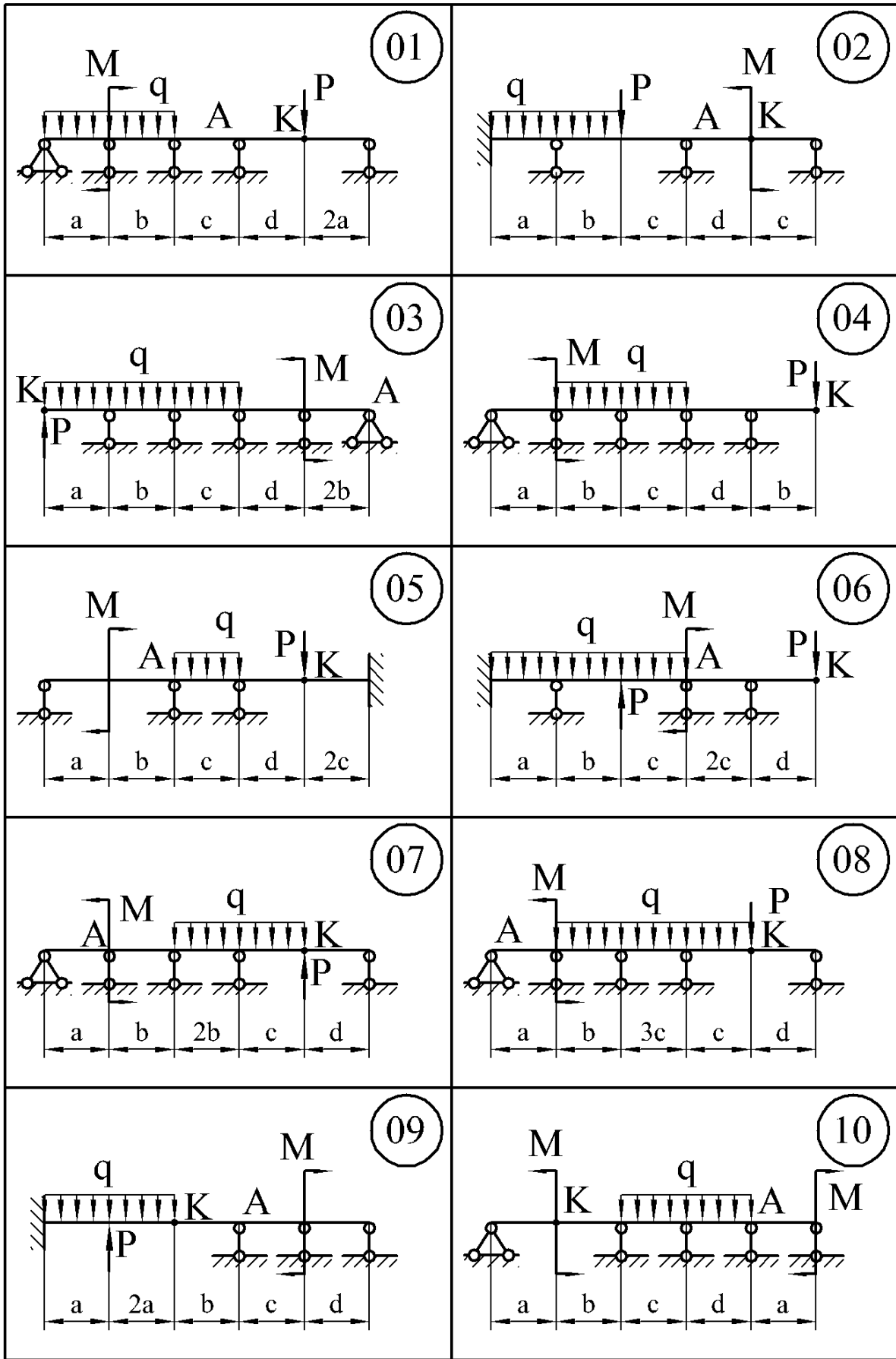


Рисунок 5.18

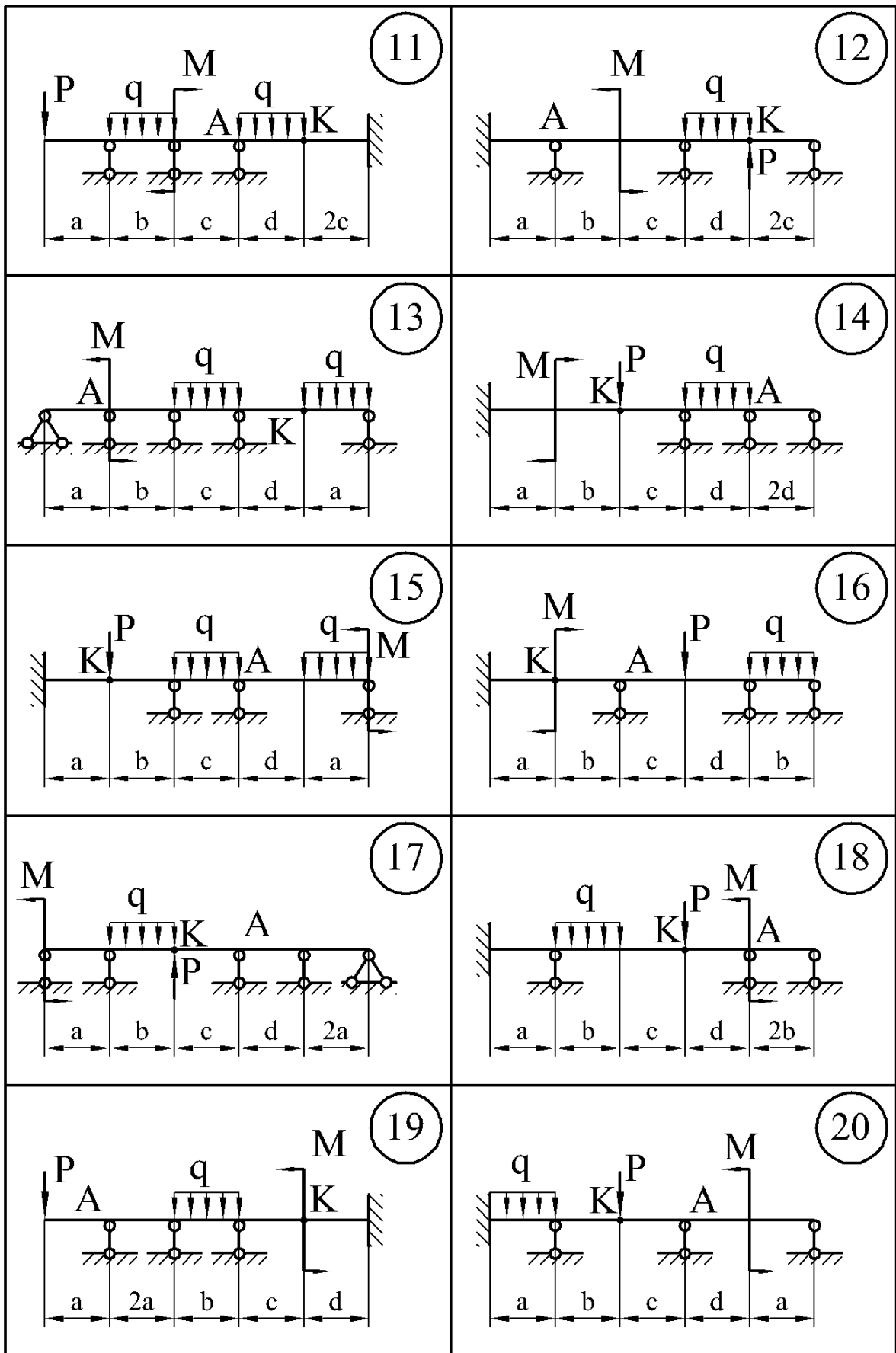


Рисунок 5.18, аркуш 2

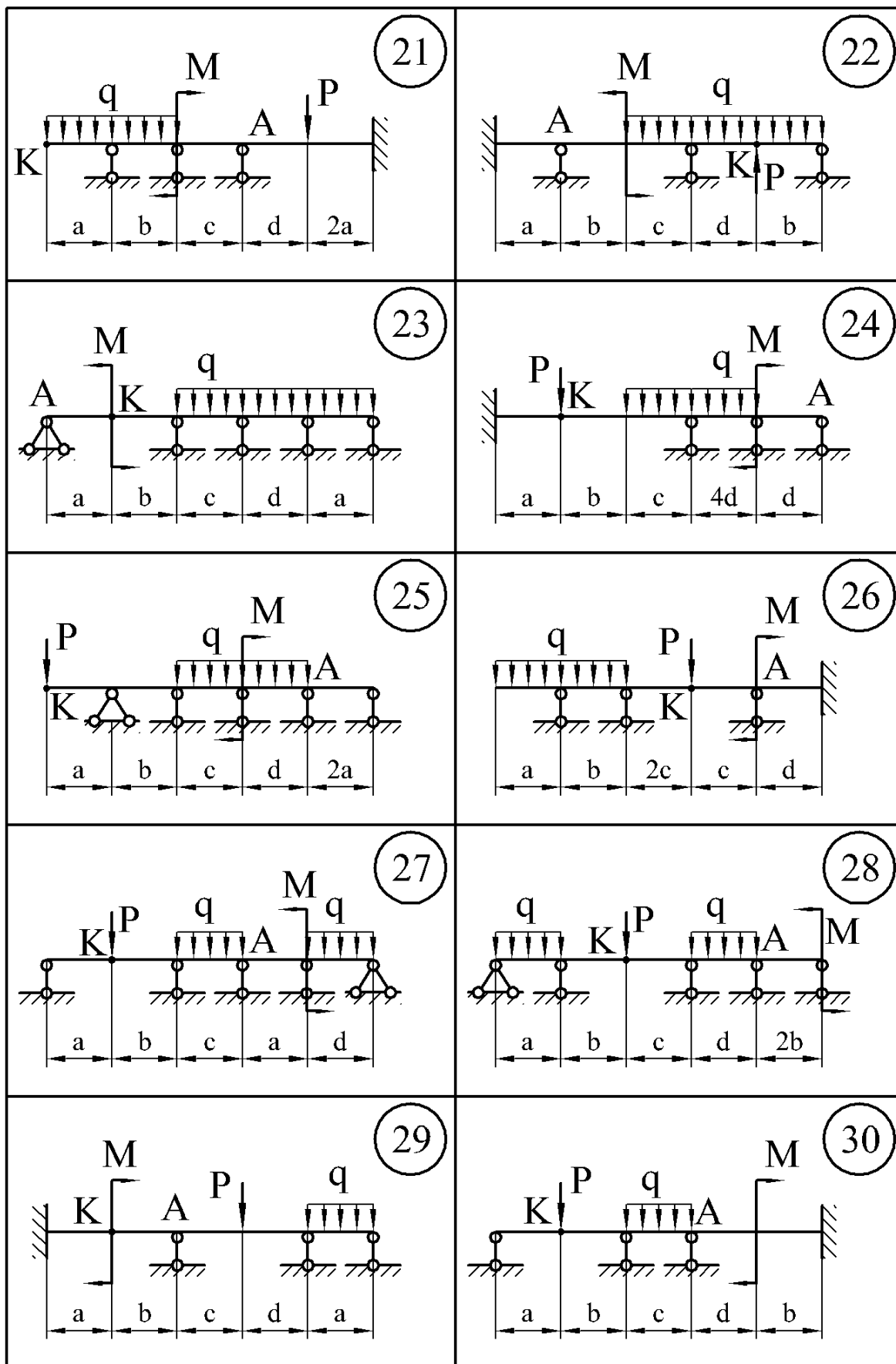


Рисунок 5.18, аркуш 3

3 Одержуємо еквівалентну систему, завантажуючи основну систему заданим навантаженням і невідомими згинальними моментами X_1 , X_2 та X_3 (рис. 5.19, в). Таким чином, еквівалентна система являє собою три прості шарнірно оперті балки, навантажені заданим навантаженням і невідомими згинальними моментами X_1 , X_2 та X_3 , що заміняють відкинуті зв'язки між сусідніми прольотами.

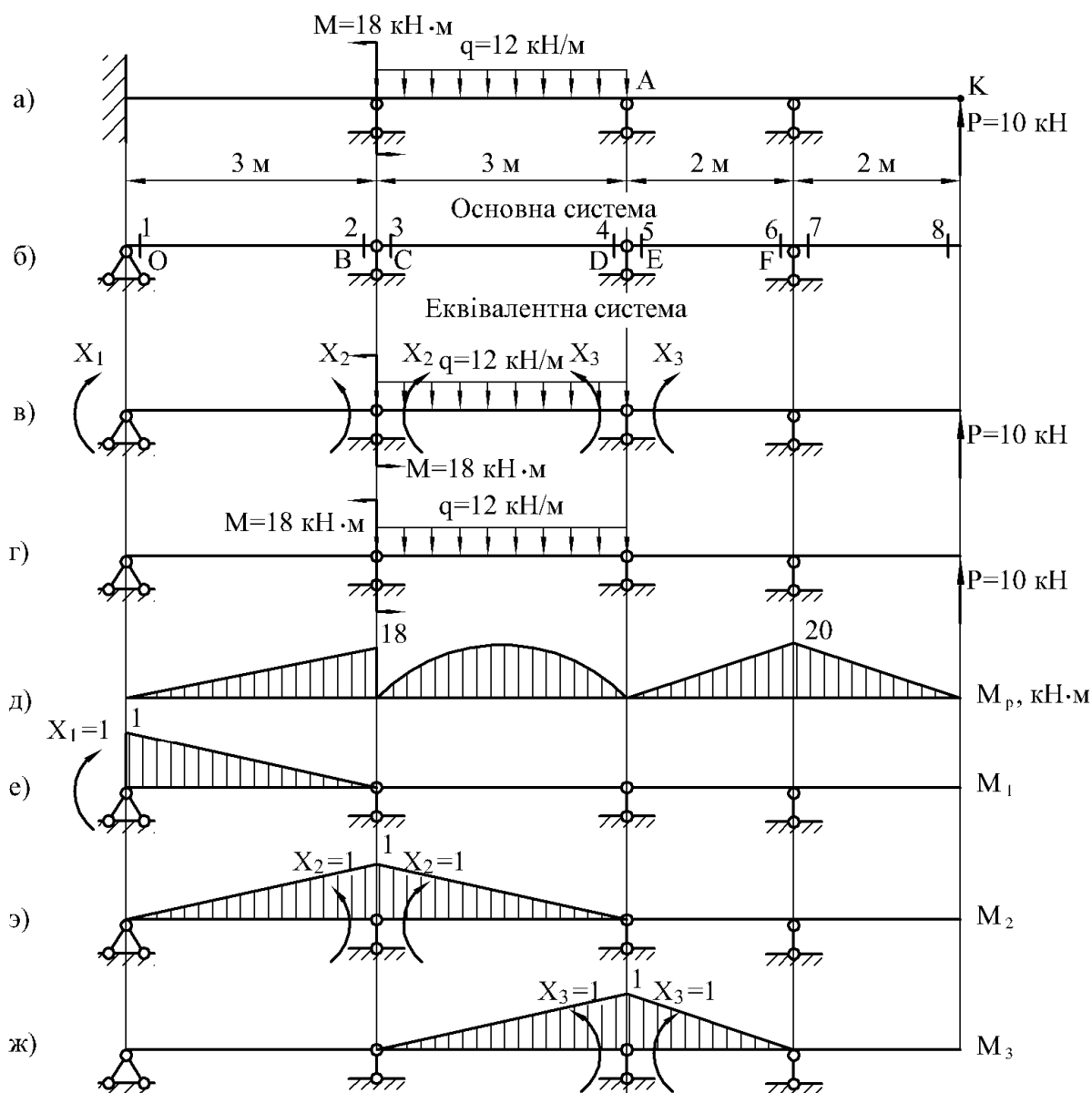


Рисунок 5.19

4 Для того, щоб визначити невідомі згинальні моменти X_1 , X_2 та X_3 , скористаємося системою канонічних рівнянь:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} = 0, \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0. \end{cases}$$

5 Розглянемо основну систему, навантажену тільки заданим навантаженням (рис. 5.19, г). Будуємо епюру згинальних моментів від дії заданого навантаження по характерних перерізах (рис. 5.19, д).

$$\begin{aligned} M_1 = M_3 = M_4 = M_5 = M_8 &= 0 \text{ кНм}; \\ M_2 = M &= 18 \text{ кНм}; \\ M_6 = M_7 = P \cdot 2 &= 10 \cdot 2 = 20 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

6 Розглянемо основну систему, навантажену тільки моментом $X_1 = 1$ (рис. 5.19, е) та будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту $X_1 = 1$ по характерних перерізах (див. рис. 5.19, е).

$$\begin{aligned} M_1 = X_1 &= 1; \\ M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = M_6 = M_7 = M_8 &= 0. \end{aligned}$$

7 Розглянемо основну систему, навантажену тільки моментом $X_2 = 1$ (рис. 5.19, є) та будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту $X_2 = 1$ по характерних перерізах (див. рис. 5.19, є).

$$\begin{aligned} M_1 = M_4 = M_5 = M_6 = M_7 = M_8 &= 0; \\ M_2 = M_3 = X_2 &= 1. \end{aligned}$$

8 Розглянемо основну систему, навантажену тільки моментом $X_3 = 1$ (рис. 5.19, ж) та будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту $X_3 = 1$ по характерних перерізах (див. рис. 5.19, ж).

$$\begin{aligned} M_1 = M_2 = M_3 = M_6 = M_7 = M_8 &= 0; \\ M_4 = M_5 = X_3 &= 1. \end{aligned}$$

9 Визначаємо коефіцієнти системи канонічних рівнянь, перемножуючи відповідні епюри, використовуючи формулу крайніх ординат:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{3}{6EJ_x}(2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{1,00}{EJ_x}, \\ \delta_{22} &= \frac{3}{6EJ_x}(2 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{3}{6EJ_x}(2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{2,00}{EJ_x}, \\ \delta_{33} &= \frac{3}{6EJ_x}(2 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{1,67}{EJ_x}, \\ \delta_{12} = \delta_{21} &= \frac{3}{6EJ_x}(1 \cdot 1) = \frac{0,50}{EJ_x}, \\ \delta_{13} = \delta_{31} &= 0, \\ \delta_{23} = \delta_{32} &= \frac{3}{6EJ_x}(1 \cdot 1) = \frac{0,50}{EJ_x}, \\ \Delta_{1p} &= \frac{3}{6EJ_x}(18 \cdot 1) = \frac{9,00}{EJ_x}, \\ \Delta_{2p} &= \frac{3}{6EJ_x}(2 \cdot 18 \cdot 1) + \frac{12 \cdot 3^3}{24EJ_x}(1 + 0) = \frac{31,50}{EJ_x}, \\ \Delta_{3p} &= \frac{12 \cdot 3^3}{24EJ_x}(0 + 1) + \frac{2}{6EJ_x}(20 \cdot 1) = \frac{20,17}{EJ_x}.\end{aligned}$$

10 Підставляємо коефіцієнти в канонічні рівняння, з рішення яких знаходимо X_1 , X_2 та X_3 :

$$\begin{cases} X_1 + 0,5X_2 + 9 = 0, \\ 0,5X_1 + 2X_2 + 0,5X_3 + 31,5 = 0, \\ 0,5X_2 + 1,67X_3 + 20,17 = 0. \end{cases} \begin{cases} X_1 = -2,45 \text{ кНм}, \\ X_2 = -13,1 \text{ кНм}, \\ X_3 = -8,16 \text{ кНм}. \end{cases}$$

11 До кожної з балок прикладаємо задане навантаження і знайдемо момент (рис. 5.20, а). Від них визначаємо реакції опор і будуємо епюри поперечних сил (рис. 5.20, б) і згинальних моментів (рис. 5.20, в).

$$\begin{aligned}Q_1 = Q_2 = R_1 &= 2,45 \text{ кН}, \\ Q_3 = R_3 &= 19,6 \text{ кН},\end{aligned}$$

$$Q_4 = -R_4 = -16,4 \text{ кН},$$

$$Q_5 = Q_6 = R_5 = 14,1 \text{ кН},$$

$$Q_5 = Q_6 = -P = -10 \text{ кН},$$

$$M_1 = -X_1 = -2,45 \text{ кНм},$$

$$M_2 = M - X_2 = 18 - 13,1 = 4,9 \text{ кНм},$$

$$M_3 = -X_2 = -13,1 = -13,1 \text{ кНм},$$

$$M_4 = M_5 = -X_3 = -8,16 \text{ кНм},$$

$$M_6 = M_7 = P \cdot 2 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кНм},$$

$$M_8 = 0 \text{ кНм},$$

$$z = \frac{19,6}{12} = 1,63 \text{ м},$$

$$M_{extr} = -X_2 + R_3 \cdot z - q \cdot z \cdot \frac{z}{2} = -13,1 + 19,6 \cdot 1,63 - 12 \cdot 1,63 \cdot \frac{1,63}{2} = 2,91 \text{ кНм}$$

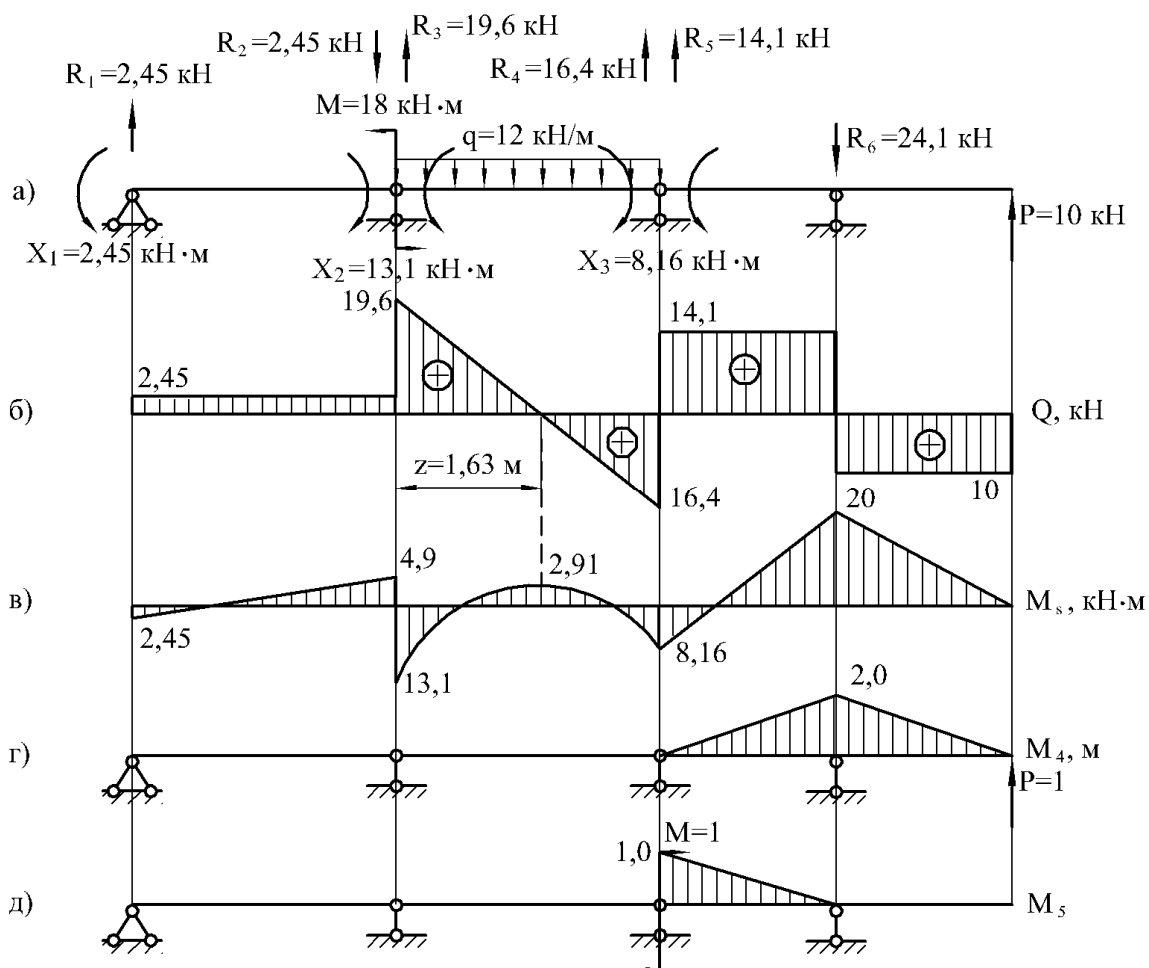


Рисунок 5.20

12 Виконуємо деформаційну перевірку. Так як в заданій статично невизначуваній системі взаємний кут повороту на проміжних опорах дорівнює нулю, то добуток остаточної епюри згинальних моментів M_s на епюри M_1 , M_2 та M_3 повинен рівнятися нулю, тобто $\Delta_{1s} = 0$, $\Delta_{2s} = 0$ та $\Delta_{3s} = 0$.

$$\Delta_{1s} = \frac{3}{6EJ_x}(-2 \cdot 2,45 \cdot 1 + 4,9 \cdot 1) = \frac{0}{EJ_x},$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2s} &= \frac{3}{6EJ_x}(2 \cdot 4,9 \cdot 1 - 2,45 \cdot 1) + \frac{3}{6EJ_x}(-2 \cdot 13,1 \cdot 1 - 8,16 \cdot 1) + \frac{12 \cdot 3^3}{24EJ_x}(1 + 0) = \\ &= \frac{3,68 - 17,18 + 13,5}{EJ_x} = \frac{17,18 - 17,18}{EJ_x} = \frac{0}{EJ_x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{3s} &= \frac{3}{6EJ_x}(-2 \cdot 8,16 \cdot 1 - 13,1 \cdot 1) + \frac{12 \cdot 3^3}{24EJ_x}(0 + 1) + \frac{2}{6EJ_x}(-2 \cdot 8,16 \cdot 1 + 20 \cdot 1) = \\ &= \frac{-14,71 + 13,5 + 1,23}{EJ_x} = \frac{-14,71 + 14,73}{EJ_x}. \end{aligned}$$

При цьому похибка склала:

$$\frac{14,73 - 14,71}{14,71} \cdot 100\% = 0,1\%.$$

13 З епюри згинальних моментів (див. рис. 5.20, в) знаходимо небезпечний переріз, для якого $M_{\max} = 20$ кНм.

З умови міцності:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma];$$

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^6 = 125 \text{ см}^3,$$

Номер двотавра знаходимо за розрахунковим значенням моменту опору $W_x \geq 125 \text{ см}^3$. По таблиці сортаменту вибираємо двотавр № 18, для якого $W_x = 143 \text{ см}^3$, $J_x = 1290 \text{ см}^4$.

14 Визначаємо прогин в точці K . Для цього до основної системи в точці K прикладаємо одиничну силу і будуємо епюру згинальних моментів (рис. 5.20, г), яку помножуємо на епюру M_s (рис. 5.20, в).

$$\begin{aligned} y_K &= \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 20 \cdot 2 - 8,16 \cdot 2) + \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 20 \cdot 2) = \frac{47,89}{EJ_x} = \\ &= \frac{47,89 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 0,019 \text{ м} \end{aligned}$$

Допустимий прогин балки довжиною $\ell = 10 \text{ м}$ дорівнює:

$$[y] = \frac{\ell}{200} = \frac{10}{200} = 0,05 \text{ м}.$$

15 Визначення кута повороту. У перерізі A прикладаємо одиничний момент, від нього будуємо епюру згинальних моментів (рис. 5.20, д), яку помножуємо на епюру M_s (рис. 5.20, в)

$$\theta_A = \frac{2}{6EJ_x}(-2 \cdot 8,16 \cdot 1 + 20 \cdot 1) = \frac{1,23}{EJ_x} = \frac{1,23 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 0,0005 \text{ рад}.$$

Допустимий кут повороту перерізу дорівнює:

$$[\theta] = 2^\circ = 0,0349 \text{ рад}.$$

6 СТІЙКІСТЬ І УДАРНЕ НАВАНТАЖЕННЯ СТРИЖНЕВИХ КОНСТРУКЦІЙ

6.1 Підбір перерізу стиснутої стійки

Для заданої стійки довжиною ℓ , що стискається центрально прикладеною силою P , з умови стійкості підібрати розміри поперечного перерізу, якщо матеріал стійки – сталь Ст.3, $[\sigma] = 160$ МПа, недовантаження – мінімальне.

Вихідні дані вибрати із таблиць 6.1 та 6.2 і рисунку 6.1

Таблиця 6.1 – Вихідні дані до задачі 6.1

Перша цифра номеру варіанту	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Значення P , кН	300	350	400	450	500	300	350	400	450	500

Таблиця 6.2 – Вихідні дані до задачі 6.1

Друга цифра номеру варіанту	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Значення ℓ , м	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5

6.1.1 Методичні вказівки до виконання задачі 6.1

1 Підбір перерізу стиснутої стійки здійснюється з умови її стійкості:

$$\sigma \leq [\sigma_{ст}], \quad (6.1)$$

$$\text{де } \sigma = \frac{P}{F} \text{ – діюче напруження в стійці;} \quad (6.2)$$

F – площа поперечного перерізу стійки;

$[\sigma_{ст}]$ – допустиме напруження на стійкість;

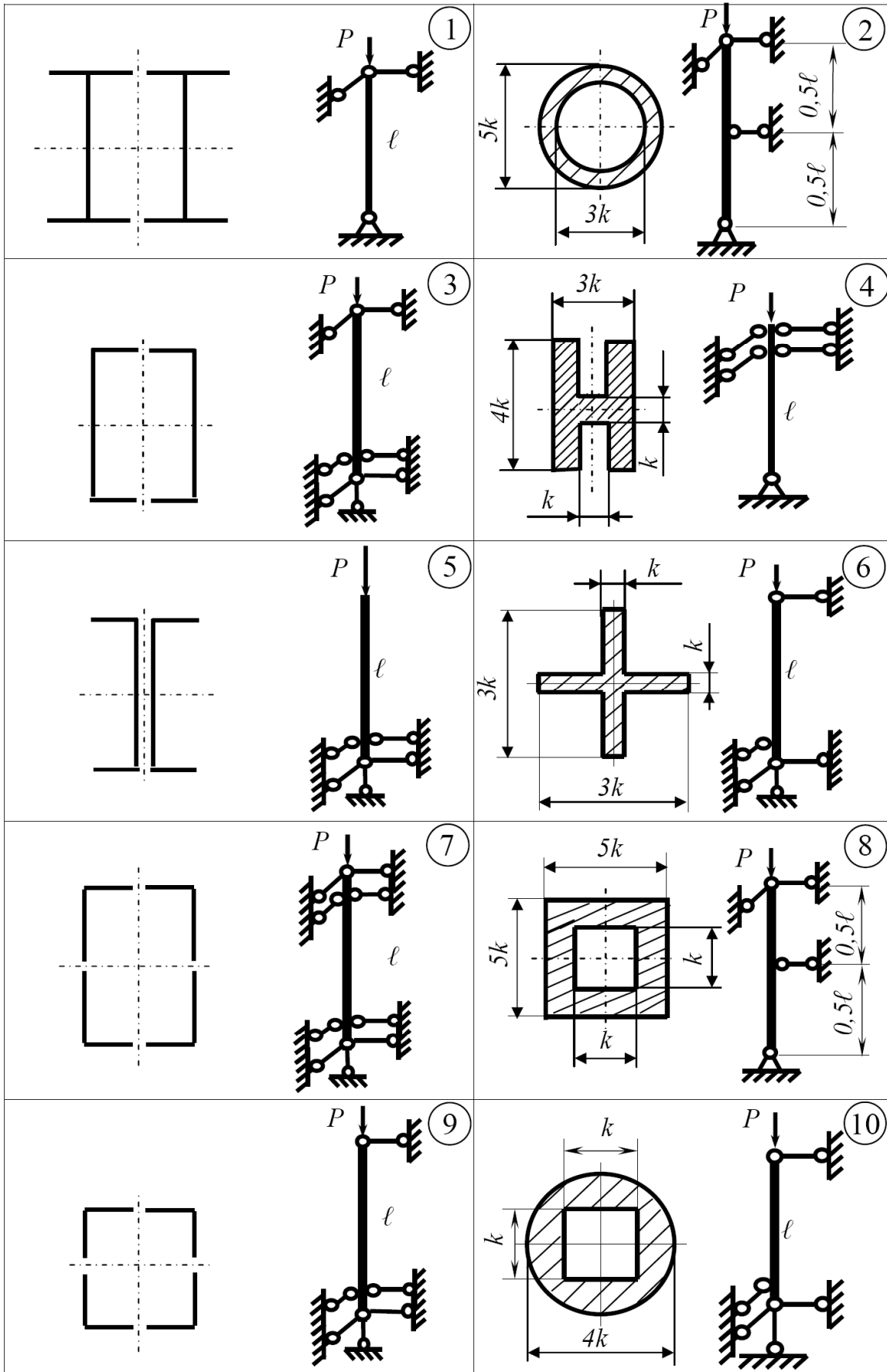


Рисунок 6.1

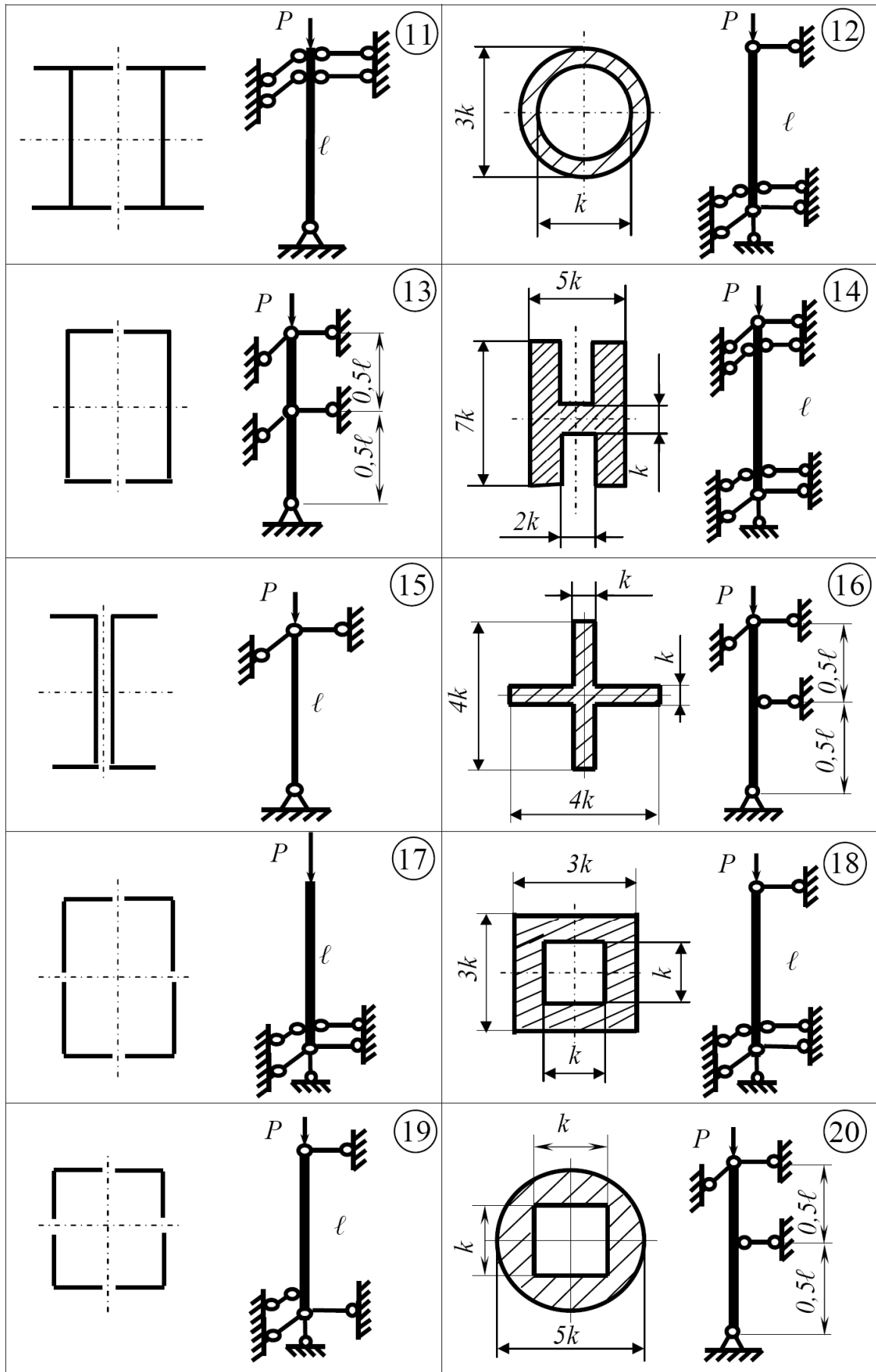


Рисунок 6.1, аркуш 2

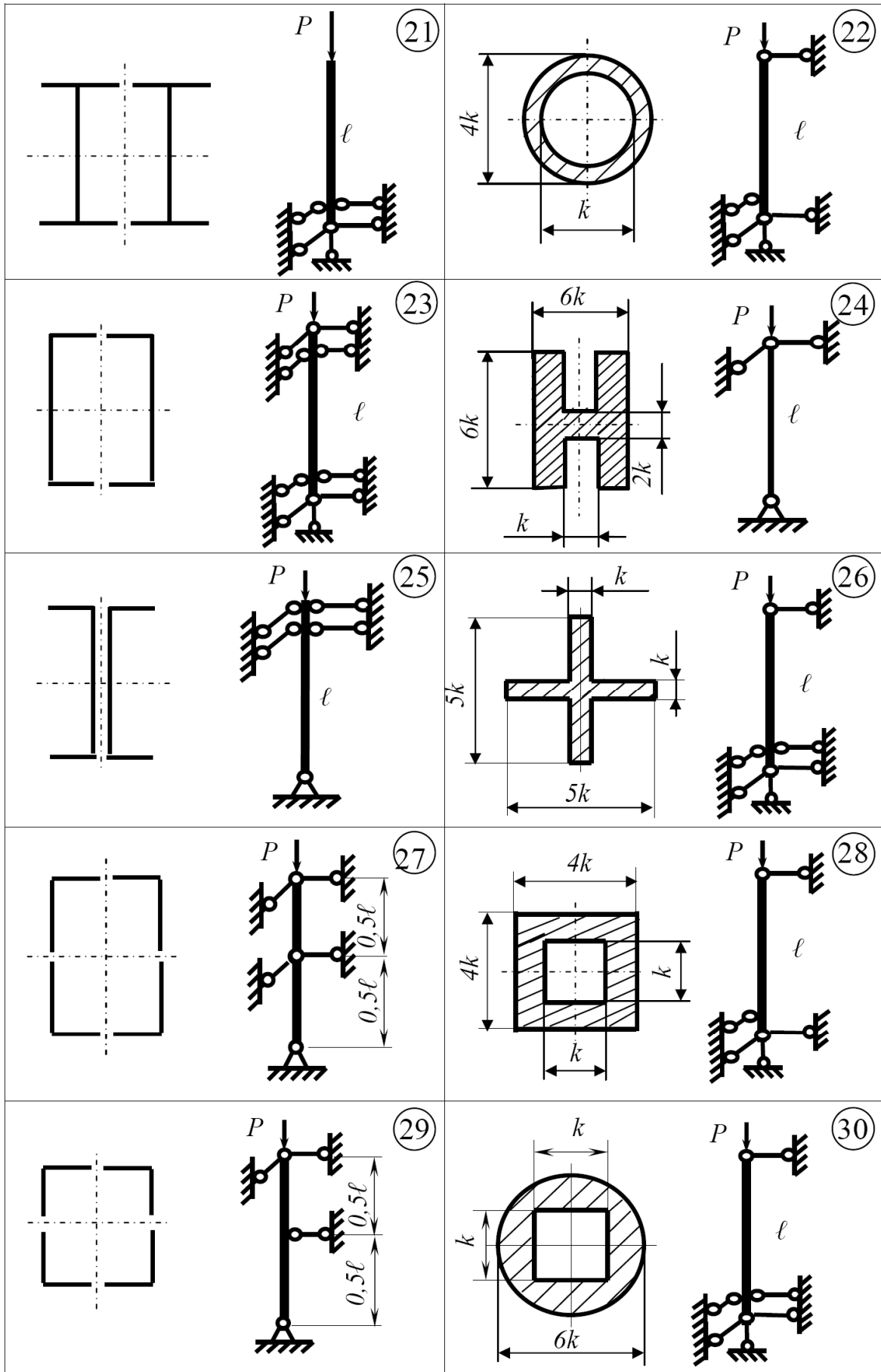


Рисунок 6.1, аркуш 3

$$[\sigma_{ст}] = \varphi \cdot [\sigma], \quad (6.3)$$

$[\sigma]$ – основне допустиме напруження (при стисканні) для матеріалу стійки;

φ – коефіцієнт зниження основного допустимого напруження ($0 \leq \varphi \leq 1$).

Оскільки в умову стійкості входять дві взаємозалежні невідомі величини F і φ , то задачу варто розв'язувати шляхом послідовних наближень, роблячи крок за кроком.

1. На першому кроці задається деяке початкове значення коефіцієнта φ (найбільш доцільно обирати $\varphi_1 = 0,5 \dots 0,6$) і визначається відповідна площа перерізу стійки – F_1 :

$$F_1 \geq \frac{P}{\varphi_1 \cdot [\sigma]}. \quad (6.4)$$

Орієнтуючись на значення F_1 , за допомогою таблиць сортаменту (додаток А) визначаються конкретні розміри перерізу і його головні моменти інерції – J_x та J_y , а також відповідні радіуси інерції:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F_1}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F_1}}. \quad (6.5)$$

Далі визначаються величини гнучкості стійки у головних площинах xz і yz (x і y – головні центральні осі перерізу, z – поздовжня вісь стійки):

$$\lambda_{xz} = \frac{\mu_{xz} \cdot \ell}{i_y}, \quad \lambda_{yz} = \frac{\mu_{yz} \cdot \ell}{i_x}. \quad (6.6)$$

де μ_{xz} і μ_{yz} – відповідні коефіцієнти приведення довжини стійки (додаток Б).

Для більшого із значень гнучкості і заданого матеріалу стійки визначається величина коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження в кінці першого кроку – φ'_1 (див. додаток Б).

Після цього виконується перевірка умови стійкості (6.1) з урахуванням знайдених величин F_1 і φ'_1 .

При негативному результаті перевірки треба безпосередньо переходити до наступного кроку. При позитивному ж результаті треба спочатку підрахувати величину недовантаження стійки:

$$\Delta = \frac{[\sigma_{ст}] - \sigma}{[\sigma_{ст}]} \cdot 100 \, \% . \quad (6.7)$$

Перехід до наступного кроку і в цьому разі є необхідним: він потрібен для визначення мінімально можливої величини недовантаження.

2. На другому кроці початкове значення коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження визначається як середньозважене його величин на початку і в кінці попереднього кроку:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} . \quad (6.8)$$

Подальший розрахунок на другому кроці – такий же, як і на першому.

3. На подальших кроках (при їх необхідності) процедура розрахунку – така ж, як і на другому кроці.

4. Розрахунок закінчується при виконанні обох вимог завдання, а саме в разі позитивного результату перевірки умови стійкості і досягненні мінімально можливого недовантаження стійки.

6.1.2 Приклад 1 розв'язання задачі 6.1

Схема стійки зображена на рисунку 6.2. Розрахунок виконаємо при таких вихідних даних: $P=420$ кН, $\ell=3,2$ м.

Розв'язання.

1. Перший крок.

Приймаємо на його початку середнє значення коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження: $\varphi_1=0,5$.

Тоді:

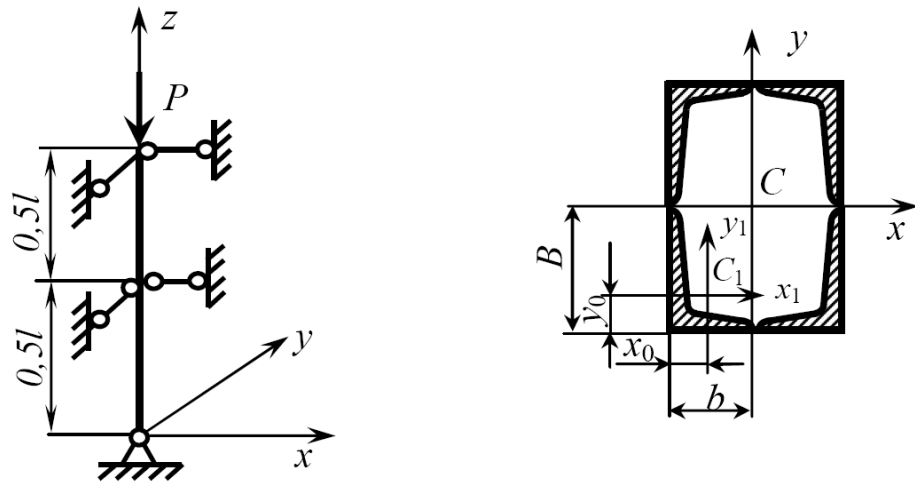


Рисунок 6.2

$$F_1 \geq \frac{P}{\varphi_1 \cdot [\sigma]} = \frac{420 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160} = 5250 \text{ мм}^2 = 52,50 \text{ см}^2.$$

Відповідна площа кожного з чотирьох кутиків, що створюють переріз:

$$F_{\text{кут}} \geq \frac{52,50}{4} = 13,125 \text{ см}^2.$$

З відповідної таблиці сортаменту (див. додаток А) вибираємо найближчий за площею кутик 110x70x8, у якого $F_{\text{кут}} = 13,9 \text{ см}^2$; $J_{x1} = 172 \text{ см}^4$; $J_{y1} = 54,6 \text{ см}^4$; $B = 11 \text{ см}$; $b = 7 \text{ см}$; $x_0 = 1,64 \text{ см}$; $y_0 = 3,61 \text{ см}$.

Підраховуємо головні моменти інерції перерізу стійки:

$$J_x = 4 \cdot [J_{x1} + F_{\text{кут}} \cdot (B - y_0)^2] = 4 \cdot [1726 + 13,9 \cdot (11 - 3,61)^2] = 3724 \text{ см}^4;$$

$$J_y = 4 \cdot [J_{y1} + F_{\text{кут}} \cdot (b - x_0)^2] = 4 \cdot [54,6 + 13,9 \cdot (7 - 1,64)^2] = 1815 \text{ см}^4;$$

Підраховуємо відповідні радіуси інерції перерізу:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{4 \cdot F_{\text{кут}}}} = \sqrt{\frac{3724}{4 \cdot 13,9}} = 8,18 \text{ см};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{4 \cdot F_{к\text{ум}}}} \sqrt{\frac{1815}{4 \cdot 13,9}} = 5,71 \text{ см.}$$

Для заданої схеми стійки (див. додаток Б):

$$\mu_{zx} = \mu_{zy} = \mu = 0,5 .$$

Визначаємо величини гнучкості стійки в її головних площинах:

$$\lambda_{xz} = \frac{\mu_{xz} \cdot \ell}{i_y} = \frac{0,5 \cdot 3,2 \cdot 10^2}{5,71} = 28,0 ;$$

$$\lambda_{yz} = \frac{\mu_{yz} \cdot \ell}{i_x} = \frac{0,5 \cdot 3,2 \cdot 10^2}{8,18} = 19,6 .$$

Порівнюючи значення λ_{xz} і λ_{yz} , бачимо, що $\lambda_{\max} = \lambda_{xz}$. Саме для цього значення λ і ведемо подальший розрахунок.

Зважаючи на те, що у відповідній таблиці (див. додаток Б) значення $\lambda = 28,0$ нема, величину коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження на кінці першого кроку – φ'_1 визначимо методом лінійної інтерполяції (рис. 6.3):

$$\varphi'_1 = 0,94 + (30 - 28,0) \cdot \text{tg} \alpha = 0,94 + (30 - 28,0) \cdot \frac{(0,96 - 0,94)}{(30 - 20)} = 0,944 .$$

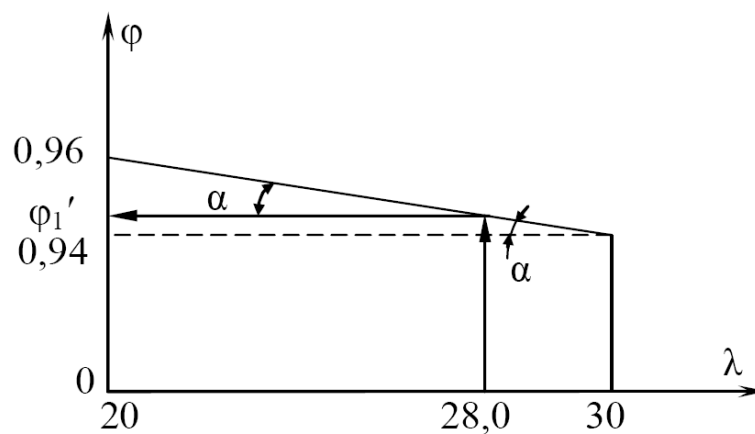


Рисунок 6.3

Виконаємо перевірку на стійкість:

$$\sigma = \frac{P}{4 \cdot F_{\text{кут}}} = \frac{420 \cdot 10^3}{4 \cdot 13,9 \cdot 10^2} = 75,5 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_{\text{ст}}] = \varphi'_1 \cdot [\sigma] = 0,944 \cdot 160 = 151,0 \text{ МПа}.$$

Умова стійкості виконується: $\sigma < [\sigma_{\text{ст}}]$.

Підрахуємо величину недовантаження на першому кроці:

$$\Delta = \frac{[\sigma_{\text{ст}}] - \sigma}{[\sigma_{\text{ст}}]} \cdot 100 = \frac{(151,0 - 75,5)}{151,0} \cdot 100 = 50 \text{ \%}.$$

4.2. Другий крок.

$$\text{Приймаємо } \varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,944}{2} = 0,722.$$

Тоді

$$F_2 \geq \frac{P}{\varphi_2 \cdot [\sigma]} = \frac{420 \cdot 10^3}{0,722 \cdot 160} = 3636 \text{ мм}^2 = 36,36 \text{ см}^2;$$

$$F_{\text{кут}} \geq \frac{36,36}{4} = 9,09 \text{ см}^2.$$

Підбираємо: кутик 80x60x7, у якого $F_{\text{кут}} = 9,42 \text{ см}^2$; $J_{y1} = 28,74 \text{ см}^4$; $b = 6 \text{ см}$; $x_0 = 1,53 \text{ см}$ (інші параметри кутика для визначення λ_{max} не потрібні).

Підраховуємо:

$$J_y = 4 \cdot [28,74 + 9,42 \cdot (6 - 1,53)^2] = 868 \text{ см}^4;$$

$$i_y = \sqrt{\frac{868}{4 \cdot 9,42}} = 4,80 \text{ см};$$

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{0,5 \cdot 3,2 \cdot 10^2}{4,80} = 33,3.$$

Величину φ'_2 і в цьому разі визначимо методом лінійної інтерполяції, беручи необхідні дані з додатку Б:

$$\varphi'_2 = 0,92 + (40 - 33,30) \cdot \frac{(0,94 - 0,92)}{(40 - 30)} = 0,933.$$

Перевіряємо умову стійкості:

$$\sigma = \frac{420 \cdot 10^3}{4 \cdot 9,42 \cdot 10^2} = 111,5 \text{ МПа};$$
$$[\sigma_{ст}] = 0,933 \cdot 160 = 149,3 \text{ МПа}.$$

Умова стійкості на другому кроці виконується.
Недовантаження стійки в цьому разі становить:

$$\Delta = \frac{(149,3 - 111,5)}{149,3} \cdot 100 = 25,3 \%$$

3. Третій крок.

$$\text{Приймаємо } \varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,722 + 0,933}{2} = 0,828.$$

Тоді

$$F_3 \geq \frac{420 \cdot 10^3}{0,828 \cdot 160} = 3170 \text{ мм}^2 = 31,70 \text{ см}^2;$$
$$F_{кут} \geq \frac{31,70}{4} = 7,925 \text{ см}^2.$$

Підбираємо: кутик 80x60x6, у якого $F_{кут} = 8,15 \text{ см}^2$; $J_{y1} = 25,18 \text{ см}^4$;
 $b = 6 \text{ см}$; $x_0 = 1,49 \text{ см}$.

Підраховуємо:

$$J_y = 4 \cdot [25,18 + 8,15 \cdot (6 - 1,49)^2] = 764 \text{ см}^4;$$

$$i_y = \sqrt{\frac{764}{4 \cdot 8,15}} = 4,84 \text{ см};$$

$$\lambda_{\max} = \frac{0,5 \cdot 3,2 \cdot 10^2}{4,84} = 33,1.$$

Визначимо методом лінійної інтерполяції:

$$\varphi'_3 = 0,92 + (40 - 33,1) \cdot \frac{(0,94 - 0,92)}{(40 - 30)} = 0,934.$$

Перевіряємо умову стійкості:

$$\sigma = \frac{420 \cdot 10^3}{4 \cdot 8,15 \cdot 10^2} = 128,8 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_{\text{ст}}] = 0,934 \cdot 160 = 149,4 \text{ МПа}.$$

Умова стійкості на третьому кроці також виконується.
Недовантаження в цьому разі становить:

$$\Delta = \frac{(149,4 - 128,8)}{149,4} \cdot 100 = 13,8 \text{ \%}.$$

4. Четвертий крок.

$$\text{Приймаємо } \varphi_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi'_3}{2} = \frac{0,828 + 0,934}{2} = 0,881.$$

Тоді

$$F_4 \geq \frac{420 \cdot 10^3}{0,881 \cdot 160} = 2980 \text{ мм}^2 = 29,80 \text{ см}^2;$$

$$F_{\text{кут}} \geq \frac{29,80}{4} = 7,45 \text{ см}^2.$$

Підбираємо: кутик 80x50x6, у якого $F_{\text{кут}} = 7,55 \text{ см}^2$; $J_{y1} = 14,85 \text{ см}^4$;
 $b = 5 \text{ см}$; $x_0 = 1,17 \text{ см}$.

Підраховуємо:

$$J_y = 4 \cdot [14,85 + 7,55 \cdot (5 - 1,17)^2] = 502 \text{ см}^4;$$

$$i_y = \sqrt{\frac{502}{4 \cdot 7,55}} = 4,08 \text{ см};$$

$$\lambda_{\max} = \frac{0,5 \cdot 3,2 \cdot 10^2}{4,08} = 39,2 .$$

Знаходимо за допомогою метода лінійної інтерполяції:

$$\varphi'_4 = 0,92 + (40 - 39,2) \cdot \frac{(0,94 - 0,92)}{(40 - 30)} = 0,922 .$$

Перевіряємо умову стійкості:

$$\sigma = \frac{420 \cdot 10^3}{4 \cdot 7,55 \cdot 10^2} = 139,1 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_{cm}] = 0,922 \cdot 160 = 147,5 \text{ МПа}.$$

Умова стійкості на четвертому кроці також виконується.
Недовантаження в цьому разі становить:

$$\Delta = \frac{(147,52 - 139,1)}{147,52} \cdot 100 = 5,7 \% .$$

5. П'ятий крок.

$$\text{Приймаємо } \varphi_5 = \frac{\varphi_4 + \varphi'_4}{2} = \frac{0,881 + 0,922}{2} = 0,902 .$$

Тоді

$$F_5 \geq \frac{420 \cdot 10^3}{0,902 \cdot 160} = 2910 \text{ мм}^2 = 29,10 \text{ см}^2 ;$$

$$F_{\text{кут}} \geq \frac{29,10}{4} = 7,275 \text{ см}^2 .$$

Підбираємо: кутик 80x50x6, у якого $F_{кут} = 7,55 \text{ см}^2$.

Зважаючи на те, що він вже був на четвертому кроці, розрахунок припиняємо. Вказані розміри кутика є остаточними, а відповідне недовантаження $\Delta = 5,7\%$ – мінімально можливе.

6.1.3 Приклад 2 розв'язання задачі 6.1

Схема стійки зображена на рисунку 6.4. Розрахунок виконаємо при таких вихідних даних: $P=320 \text{ кН}$, $\ell=2,2 \text{ м}$.

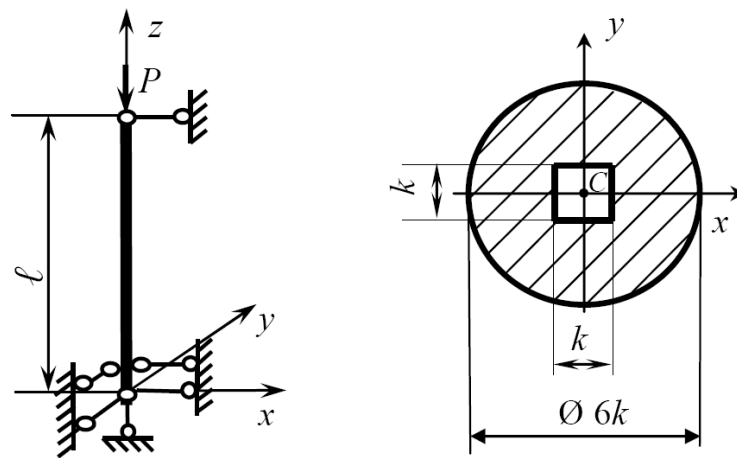


Рисунок 6.4

Розв'язання.

Особливістю даної схеми є те, що в ній усі розміри перерізу стійки визначає параметр k . Тому весь розрахунок спрямовується на визначення величини цього параметра.

Враховуємо, що площа перерізу стійки – F пов'язана з параметром k такою залежністю:

$$F = \frac{\pi}{4} \cdot (6k)^2 - k^2 = 27,26 \cdot k^2.$$

1 Перший крок.

Приймаємо на його початку $\phi_1 = 0,5$. Тоді відповідна площа перерізу буде дорівнювати:

$$F_1 \geq \frac{P}{\varphi_1 \cdot [\sigma]} = \frac{320 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160} = 4000 \text{ мм}^2.$$

Визначаємо величину параметра k на цьому кроці:

$$k_1 \geq \sqrt{\frac{F_1}{27,26}} = \sqrt{\frac{4000}{27,26}} = 12,1 \text{ мм.}$$

Округляємо величину k_1 до найближчого цілого числа: $k_1 = 13 \text{ мм}$.

Визначаємо головні моменти інерції перерізу стійки і відповідні радіуси інерції:

$$J_x = J_y = \frac{\pi}{64} \cdot (6k_1)^4 - \frac{1}{12} \cdot k_1 \cdot k_1^3 = 63,502 \cdot k_1^4 = 63,502 \cdot 13^4 = 1,814 \cdot 10^6 \text{ мм}^4;$$

$$i_x = i_y = \sqrt{\frac{J_x}{27,26 \cdot k_1^2}} = \sqrt{\frac{1,814 \cdot 10^6}{27,26 \cdot 13^2}} = 19,84 \text{ мм.}$$

Коефіцієнти приведення довжини стійки при заданій схемі її кріплення (рис. 6.5) становлять: $\mu_{xz} = 0,7$; $\mu_{yz} = \mu_{\max} = 2,0$ (додаток Б).

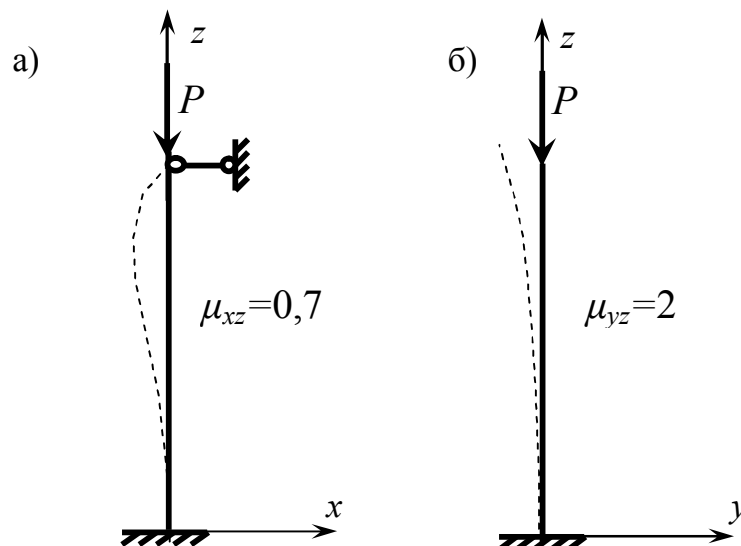


Рисунок 6.5

З урахуванням цього визначимо величини гнучкості стійки у її головних площинах xz і yz :

$$\lambda_{xz} = \frac{\mu_{xz} \cdot \ell}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 2,2 \cdot 10^3}{19,84} = 77,6;$$

$$\lambda_{yz} = \frac{\mu_{yz} \cdot \ell}{i_x} = \frac{2,0 \cdot 2,2 \cdot 10^3}{19,84} = 221,8.$$

Порівнюючи ці величини, бачимо, що $\lambda_{\max} = \lambda_{yz}$. Саме це значення гнучкості візьмемо для подальшого розрахунку.

Враховуючи те, що значення $\lambda = 221,8$ переважає максимальне в додатку Б ($\lambda = 200$), приймаємо в кінці першого кроку:

$$\varphi'_1 = \varphi_{\min} = 0.$$

В цьому разі допустиме напруження

$$[\sigma_{cm}] = \varphi'_1 \cdot [\sigma] = 0$$

і перевірка на стійкість не має сенсу. Тому переходимо до наступного кроку.

4.2 Другий крок.

$$\text{Приймаємо } \varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0}{2} = 0,25.$$

Тоді

$$F_2 \geq \frac{P}{\varphi_2 \cdot [\sigma]} = \frac{320 \cdot 10^3}{0,25 \cdot 160} = 8000 \text{ мм}^2.$$

$$k_2 \geq \sqrt{\frac{F_2}{27,26}} = \sqrt{\frac{8000}{27,26}} = 17,1 \text{ мм}.$$

Приймаємо: $k_2 = 18 \text{ мм}$.

Підраховуємо:

$$J_x = 63,502 \cdot 18^4 = 6,666 \cdot 10^6 \text{ мм}^4;$$

$$i_x = \sqrt{\frac{6,666 \cdot 10^6}{27,26 \cdot 18^2}} = 27,47 \text{ мм};$$

$$\lambda_{\max} = \lambda_{yz} = \frac{2,0 \cdot 2,2 \cdot 10^3}{27,47} = 160,2.$$

Зважаючи на те, що у додатку Б точно такого значення нема, величину коефіцієнта φ на кінці другого кроку визначимо методом лінійної інтерполяції (рис. 6.6):

$$\varphi'_2 = 0,26 + (170 - 160,2) \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0,26 + (170 - 160,2) \cdot \frac{(0,29 - 0,26)}{(170 - 160)} = 0,289.$$

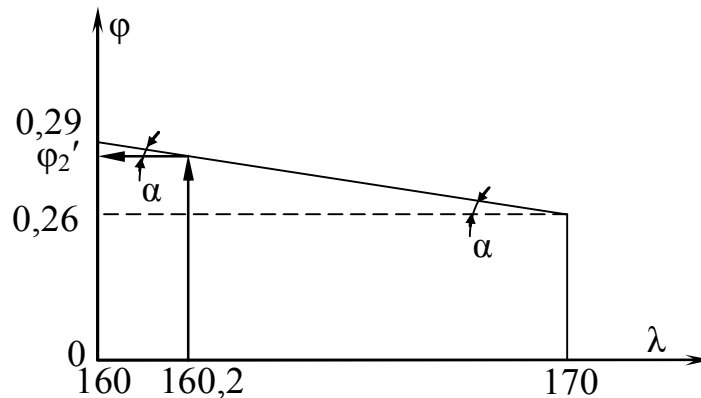


Рисунок 6.6

Перевіримо умову стійкості.

Діюче напруження в стійці:

$$\sigma = \frac{P}{F_2} = \frac{P}{27,26 \cdot k_2^2} = \frac{320 \cdot 10^3}{27,26 \cdot 18^2} = 36,2 \text{ МПа};$$

Допустиме напруження:

$$[\sigma_{cm}] = \varphi'_2 \cdot [\sigma] = 0,289 \cdot 160 = 46,2 \text{ МПа.}$$

Оскільки $\sigma < [\sigma_{cm}]$, умова стійкості виконується.

Підрахуємо величину недовантаження стійки:

$$\Delta = \frac{[\sigma_{ст}] - \sigma}{[\sigma_{ст}]} \cdot 100 = \frac{(46,2 - 36,2)}{46,2} \cdot 100 = 21,6 \% .$$

3 Третій крок.

$$\text{Приймаємо } \varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,25 + 0,289}{2} = 0,270 .$$

Тоді

$$F_3 \geq \frac{P}{\varphi_3 \cdot [\sigma]} = \frac{320 \cdot 10^3}{0,270 \cdot 160} = 7407 \text{ мм}^2;$$

$$k_3 \geq \sqrt{\frac{F_3}{27,26}} = \sqrt{\frac{7407}{27,26}} = 16,5 \text{ мм.}$$

Приймаємо: $k_3 = 17 \text{ мм.}$

Підраховуємо:

$$J_x = 63,502 \cdot 17^4 = 5,304 \cdot 10^6 \text{ мм}^4;$$

$$i_x = \sqrt{\frac{5,304 \cdot 10^6}{27,26 \cdot 17^2}} = 25,95 \text{ мм};$$

$$\lambda_{\max} = \frac{2,0 \cdot 2,2 \cdot 10^3}{25,95} = 169,6 .$$

Використовуючи метод лінійної інтерполяції, визначаємо:

$$\varphi'_3 = 0,26 + (170 - 169,7) \cdot \frac{(0,29 - 0,26)}{(170 - 160)} = 0,261 .$$

Перевірка стійкості:

$$\sigma = \frac{320 \cdot 10^3}{27,26 \cdot 17^2} = 40,6 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_{cm}] = 0,261 \cdot 160 = 41,80 \text{ МПа.}$$

Оскільки $\sigma < [\sigma_{cm}]$, стійкість в цьому разі також забезпечена.

Величина недовантаження

$$\Delta = \frac{(41,8 - 40,6)}{41,8} \cdot 100 = 2,9 \%$$

4 Четвертий крок.

$$\text{Приймаємо } \varphi_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi'_3}{2} = \frac{0,270 + 0,261}{2} = 0,266.$$

Тоді

$$F_4 \geq \frac{P}{\varphi_4 \cdot [\sigma]} = \frac{320 \cdot 10^3}{0,266 \cdot 160} = 7519 \text{ мм}^2;$$

$$k_4 \geq \sqrt{\frac{F_4}{27,26}} = \sqrt{\frac{7519}{27,26}} = 16,6 \text{ мм.}$$

Приймаємо: $k_4 = 17$ мм.

Зважаючи на те, що цей результат вже був на третьому кроці, розрахунок припиняємо. Вказане значення параметра k є остаточним, а відповідне недовантаження $\Delta = 2,9\%$ – мінімально можливе.

6.2 Визначення напружень в рамі при ударі.

На сталеву раму із двотаврового профілю падає тіло масою m з висоти h . Визначити максимальні нормальні напруження в рамі, що виникають внаслідок удару.

Вихідні дані вибрати із таблиць 6.3 та 6.4 і рисунку 6.7.

6.2.1 Методичні вказівки до виконання задачі 6.2

Напруження в елементах пружної конструкції при ударному навантаженні визначаються шляхом помноження на динамічний коефіцієнт уда-

ру напружень від дії статично прикладеної в точці удару ваги тіла, що падає на конструкцію, – $m \cdot g$ (g – прискорення вільного падіння). При цьому динамічний коефіцієнт удару – κ_{∂} визначається за формулою:

$$\kappa_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\Delta_{\text{ст}}}}, \quad (6.9)$$

де $\Delta_{\text{ст}}$ – вертикальне переміщення точки удару під дією статично прикладеної сили $m \cdot g$.

Таблиця 6.3 – Вихідні дані до задачі 6.2

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a , м	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
b , м	1,5	2,5	1,0	3,0	2,0	2,5	3,0	1,5	2,0	1,0
c , м	3,0	1,0	1,5	2,0	2,5	2,0	2,5	1,0	3,0	1,5
d , м	2,5	2,0	3,0	1,0	1,5	1,5	2,0	3,0	1,0	2,5

Таблиця 6.4 – Вихідні дані до задачі 6.2

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m , кг	60	70	80	90	100	60	70	80	90	100
h , мм	300	250	200	150	100	350	300	250	200	150
Номер двотавра	20	22	24	27	30	22	24	27	30	33

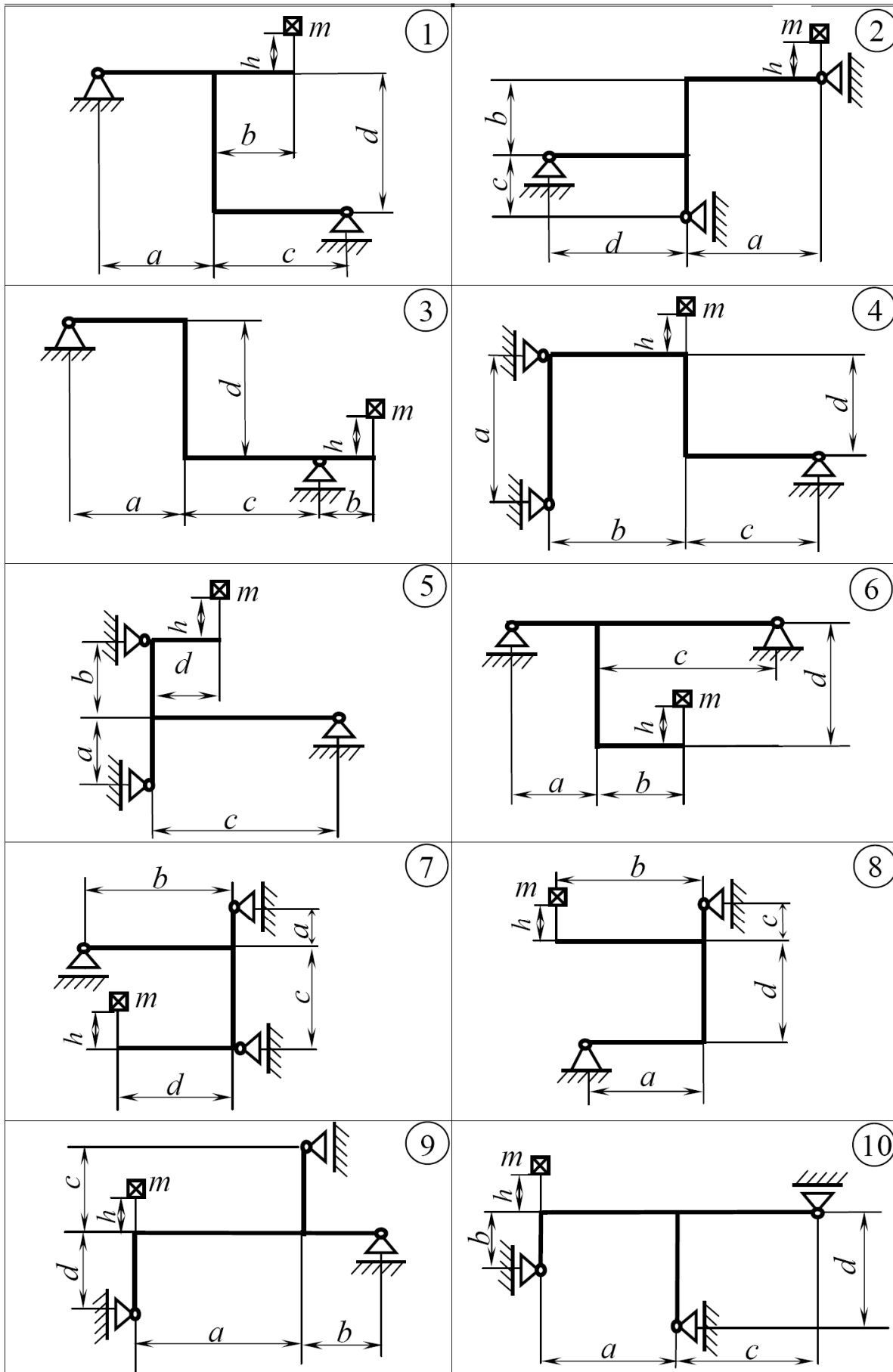


Рисунок 6.7

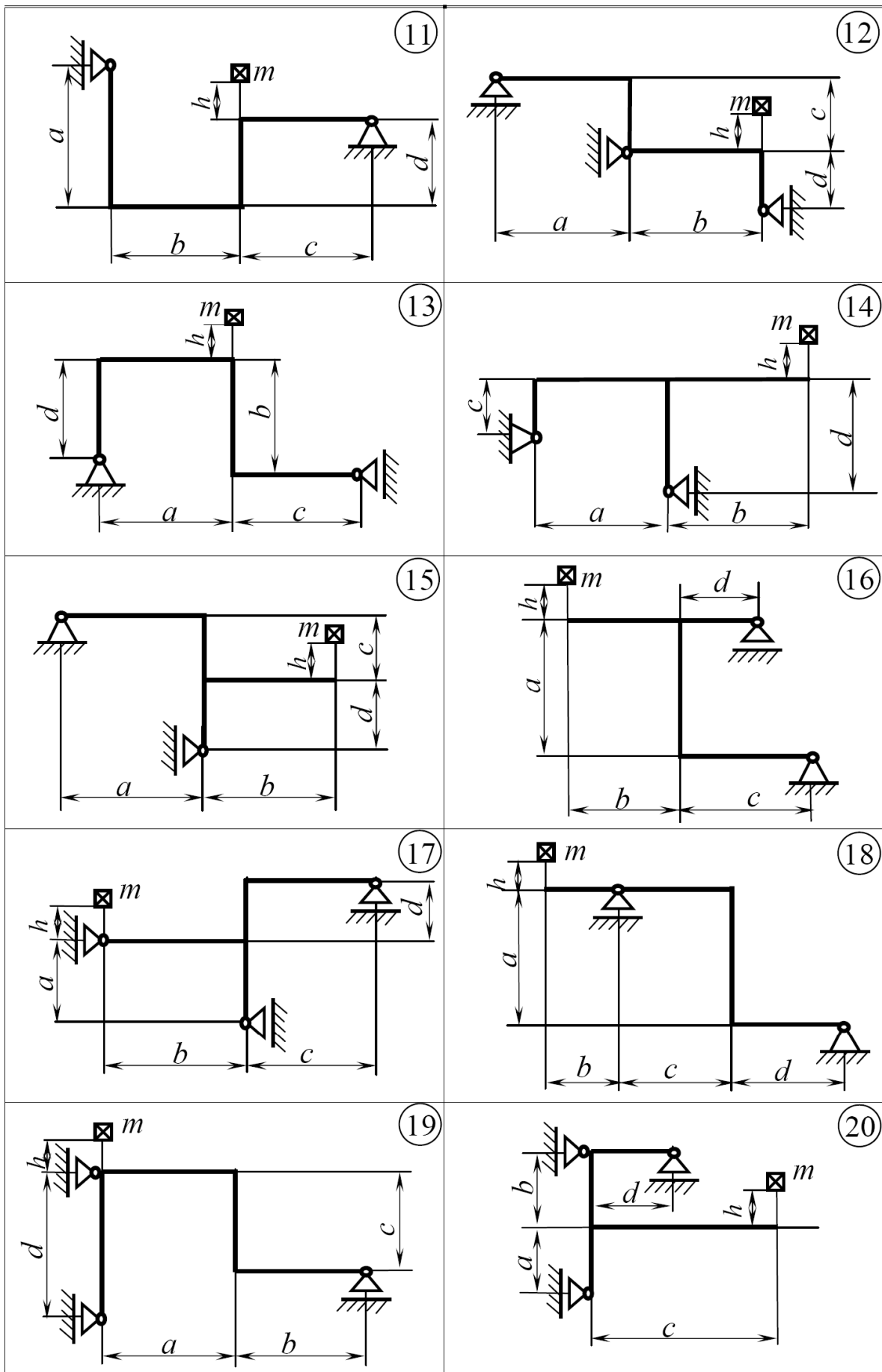


Рисунок 6.7, аркуш 2

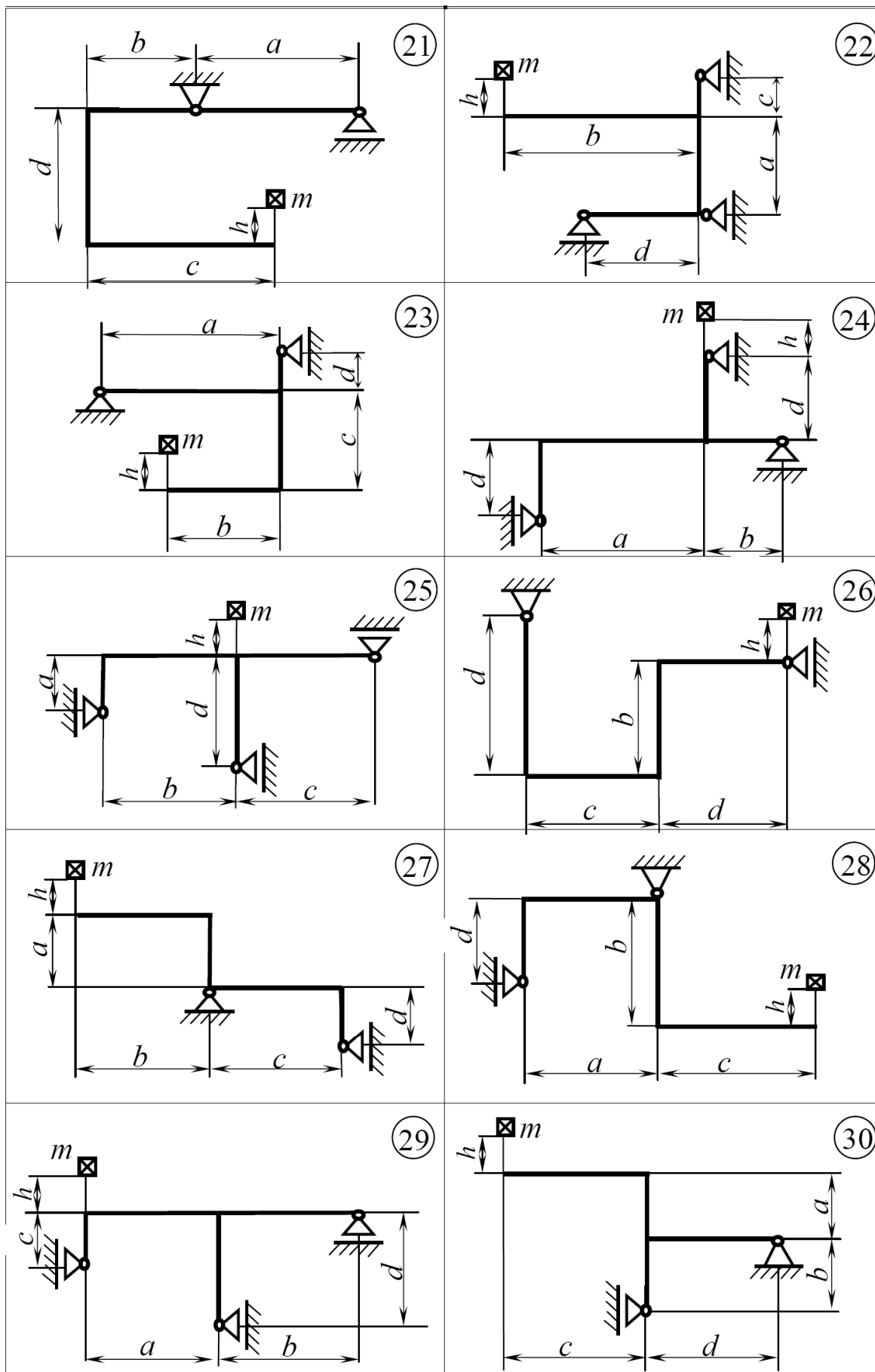


Рисунок 6.7, аркуш 3

Задача розв'язується у такій послідовності.

1. До рами в точці удару прикладається вертикальна одинична сила $P=1$ і визначаються опорні реакції рами від дії цієї сили.

2. Будується еюра згинальних моментів \bar{M} , що виникають в рамі при дії вказаної сили.

3. Визначається методом Мора вертикальне переміщення δ_{11} точки прикладення одиничної сили.

4. Визначається величина Δ_{cm} :

$$\Delta_{cm} = m \cdot g \cdot \delta_{11}. \quad (6.10)$$

5. Визначається динамічний коефіцієнт удару (див. формулу 6.9).

6. Визначаються максимальні нормальні напруження в рамі, що виникають внаслідок удару:

$$\sigma_{\max} = \frac{\bar{M}_{\max}}{W_x} \cdot m \cdot g \cdot \kappa_{\delta}, \quad (6.11)$$

де \bar{M}_{\max} – максимальне значення згинального моменту на епюрі \bar{M} ;

W_x – осьовий момент опору двотавра, з якого виготовлено раму.

6.2.2 Приклад 1 розв'язання задачі 6.2

Схема рами зображена на рисунку 6.8. Розрахунок виконаємо при таких вихідних даних: $a = 2,8$ м; $b = 1,2$ м; $c = 2,4$ м; $d = 1,8$ м; $m = 75$ кг; $h = 180$ мм; номер двотавра – 24 ($W_x = 289$ см³; $J_x = 3460$ см⁴);

Розв'язання задачі.

1 Прикладаємо в точці удару вертикальну одиничну силу $P = 1$ і визначаємо від її дії опорні реакції рами (рис. 6.9):

$$\sum m_B = 0: \quad P \cdot (c + d) - R_A \cdot a = 0; \quad R_A = P \cdot \frac{(c + d)}{a} = 1 \cdot \frac{4,2}{2,8} = 1,5;$$

$$\sum P_y = 0: \quad y_B - P = 0; \quad y_B = P = 1;$$

$$\sum P_z = 0: \quad z_B - R_A = 0; \quad z_B = R_A = 1,5.$$

Перевірка:

$$\sum m_A = P \cdot c + y_B \cdot d - z_B \cdot a = 1 \cdot 2,4 + 1 \cdot 1,8 - 1,5 \cdot 2,8 = 4,2 - 4,2 = 0.$$

Умова рівноваги виконується. Реакції визначені вірно.

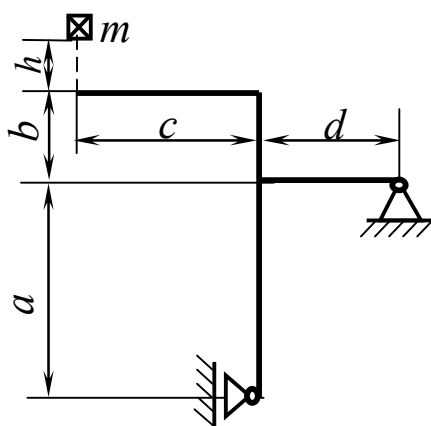


Рисунок 6.8

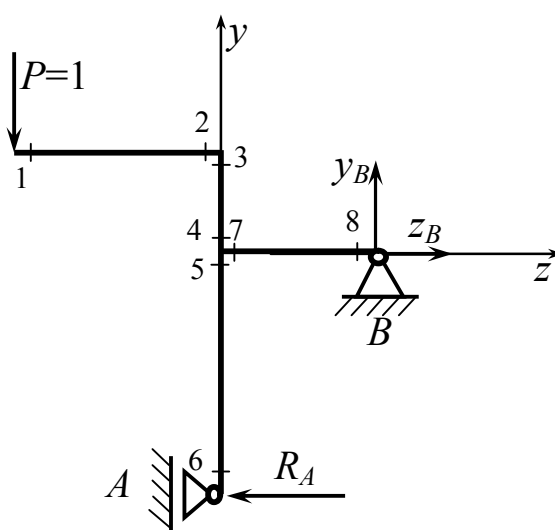


Рисунок 6.9

2 Визначаємо величини згинальних моментів у характерних перерізах рами (див. рис. 6.9) і будуємо епюру – \bar{M} (рис. 6.10):

$$M_1 = M_6 = M_8 = 0; \quad M_2 = P \cdot c = 1 \cdot 2,4 = 2,4 \text{ м}; \quad M_3 = M_2 = 2,4 \text{ м};$$

$$M_5 = R_A \cdot a = 1,5 \cdot 2,8 = 4,2 \text{ м}; \quad M_7 = Y_B \cdot d = 1 \cdot 1,8 = 1,8 \text{ м}.$$

3 Застосовуючи формулу крайніх ординат (додаток В), визначаємо вертикальне переміщення точки прикладення одиничної сили:

$$\delta_{11} = \bar{M} \times \bar{M} = \frac{2,4}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 2,4 \cdot 2,4) + \frac{1,2}{6E \cdot J_x} (2 \cdot 2,4 \cdot 2,4 + 2 \cdot 2,4 \cdot 2,4 +$$

$$+ 2,4 \cdot 2,4 + 2,4 \cdot 2,4) + \frac{1,8}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 1,8 \cdot 1,8) + \frac{2,8}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 4,2 \cdot 4,2) =$$

$$= \frac{27,648}{6E \cdot J_x} + \frac{41,472}{6E \cdot J_x} + \frac{11,664}{6E \cdot J_x} + \frac{98,784}{6E \cdot J_x} = \frac{179,568}{6E \cdot J_x} = \frac{179,568 \cdot 10^9}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3460 \cdot 10^4} =$$

$$= 4,325 \cdot 10^{-3} \text{ мм/Н}$$

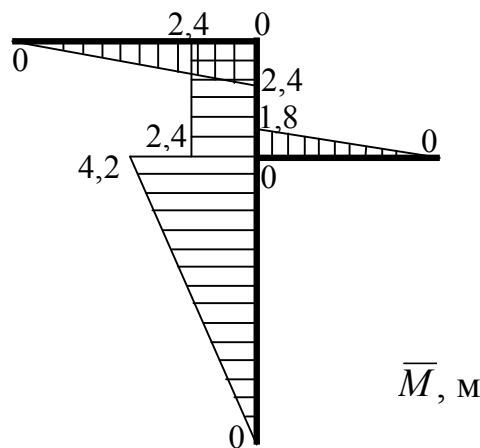


Рисунок 6.10

4 Визначаємо вертикальне переміщення точки удару під дією статично прикладеної сили ваги тіла, що падає на раму:

$$\Delta_{cm} = m \cdot g \cdot \delta_{11} = 75 \cdot 9,81 \cdot 4,325 \cdot 10^{-3} = 3,2 \text{ мм}.$$

5 Визначаємо динамічний коефіцієнт удару:

$$\kappa_{\delta} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\Delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 180}{3,2}} = 11,7.$$

6 Визначаємо максимальні нормальні напруження, що виникають в рамі внаслідок удару:

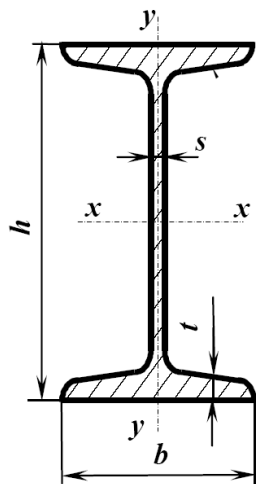
$$\sigma_{\max} = \frac{\bar{M}_{\max}}{W_x} \cdot m \cdot g \cdot \kappa_{\delta} = \frac{4,2 \cdot 10^3}{289 \cdot 10^3} \cdot 75 \cdot 9,81 \cdot 11,7 = 125,1 \text{ МПа.}$$

Додаток А Основні параметри катаних профілів

1 Нормальні лінійні розміри, мм (по ГОСТ 6636-69, фрагмент ряду Ra20)

Таблиця А.1

1,0	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,5	2,8	3,2	3,6
4,0	4,5	5,0	5,6	6,3	7,1	8,0	9,0	10	11	12	14
16	18	20	22	25	28	32	36	40	45	50	56
63	71	80	90	100	110	125	140	160	180	200	220
250	280	320	360	400	450	500	560	630	710	800	900



Таблиця А.2

2. Двотаври сталі гарячекатані (за ГОСТ 8239-89)

Позначення:

h – висота профілю

b – ширина полки

s – товщина стінки

t – середня товщина полки

F – площа перерізу

J – момент інерції

W – момент опору

i – радіус інерції

S – статичний момент
напівперерізу

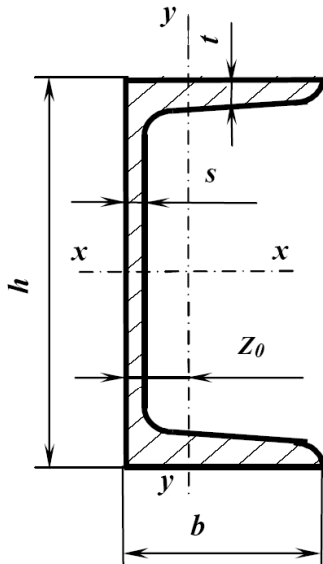
Приклад позначення

профілю: Двотавр 30 ГОСТ 8239-89

Номер профілю	Основні розміри, мм				F см ²	J_X см ⁴	W_X см ³	i_X см	S_X см ³	J_Y см ⁴	W_Y см ³	i_Y см
	h	b	s	t								
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

3. Швелери сталні гарячекатані

(за ГОСТ 8240-89)



Позначення:

h – висота профілю
 b – ширина полки
 s – товщина стінки
 t – середня товщина полки
 F – площа перерізу
 J – момент інерції

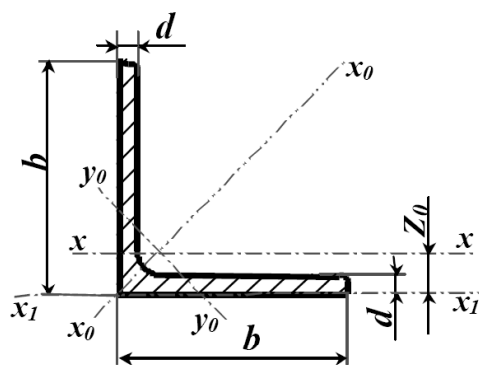
W – момент опору
 i – радіус інерції
 S – статичний момент напівперерізу
 Z_0 – відстань від осі y до зовнішньої грані стінки

Приклад позначення профілю:
Швелер 30 ГОСТ 8240-89

Таблиця А.3

Номер профілю	Основні розміри, мм				F см ²	J_X см ⁴	W_X см ³	i_X см	S_X см ³	J_Y см ⁴	W_Y см ³	i_Y см	Z_0 см
	h	b	s	t									
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14а	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80
16а	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94
18а	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20а	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22а	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24а	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

**4 КУТИКИ СТАЛЕВІ
ГАРЯЧКАТАНІ РІВНОПОЛИЧНІ
(за ГОСТ 8509-93 або ДСТУ2251-93)**



Позначення:

- b – ширина полки
- F – площа перерізу
- i – радіус інерції
- d – середня товщина полки
- J – момент інерції
- Z_0 – відстань від центра ваги перерізу до зовнішньої грані полки

Приклад позначення профілю:
Кутик 50х50х3 ГОСТ 8509-93

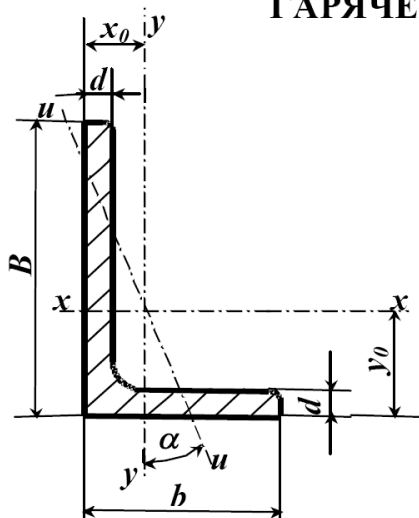
Таблиця А.4

Номер кутика	Основні розміри мм		F см ²	J_X см ⁴	i_X см	J_{X_0} max см ⁴	i_{x_0} max см	I_{y_0} min см ⁴	i_{y_0} min см	Z_0 см
	b	d								
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,6	0,75	0,17	0,39	0,60
		4	1,46	0,50	0,58	0,8	0,73	0,22	0,38	0,64
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,3	0,95	0,34	0,49	0,73
		4	1,86	1,03	0,74	1,6	0,93	0,44	0,48	0,76
2,8	28	5	2,27	1,22	0,73	1,9	0,92	0,53	0,48	0,80
		3	1,62	1,16	0,85	1,8	1,07	0,48	0,55	0,80
3	30	3	1,74	1,45	0,91	2,3	1,15	0,60	0,59	0,85
		4	2,27	1,84	0,90	2,9	1,13	0,77	0,58	0,89
		5	2,78	2,20	0,89	3,5	1,12	0,94	0,58	0,93
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,8	1,23	0,74	0,63	0,89
		4	2,43	2,26	0,96	3,6	1,21	0,94	0,62	0,94
3,5	35	3	2,04	2,35	1,07	3,7	1,35	0,97	0,69	0,97
		4	2,67	3,01	1,06	4,8	1,33	1,25	0,68	1,01
		5	3,28	3,61	1,05	5,7	1,32	1,52	0,68	1,05
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,6	1,55	1,47	0,79	1,09
		4	3,08	4,58	1,22	7,3	1,53	1,90	0,78	1,13
		5	3,79	5,53	1,21	8,8	1,52	2,30	0,78	1,17
		6	4,48	6,41	1,20	10,1	1,50	2,70	0,78	1,21
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,1	1,75	2,12	0,89	1,21
		4	3,48	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	1,26
		5	4,29	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	1,30
5	50	6	5,08	9,35	1,36	14,8	1,71	3,90	0,88	1,34
		3	2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	1,33
		4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	1,38
5,6	56	5	4,80	11,20	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	1,42
		6	5,69	13,07	1,52	20,7	1,91	5,43	0,98	1,46
		4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	1,52
		5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	1,57
6,3	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	1,69
		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	1,74
		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,20	1,24	1,78
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	1,88
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	1,90
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	1,94
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	1,99
7,5	75	8	10,7	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	2,02
		5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	2,02
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	2,06
		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	2,10
		8	11,5	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	2,15
9	12,8	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	2,18		

Продовження таблиці А.4

Номер кутика	Основні розміри мм		F см ²	J_X см ⁴	i_X см	I_{x_0} max см ⁴	i_{x_0} max см	I_{y_0} min см ⁴	i_{y_0} min см	z_0 см
	b	d								
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	2,17
		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	2,19
		7	10,8	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	2,23
		8	12,3	73,4	2,34	116,0	3,08	30,3	1,57	2,27
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	2,43
		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	2,47
		8	13,9	106,0	2,76	168	3,48	43,8	1,77	2,51
		9	15,6	118,0	2,75	186	3,46	48,6	1,77	2,55
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	2,68
		7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	2,71
		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	2,75
		10	19,2	179	2,05	284	3,84	74,1	1,96	2,83
		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	2,91
		14	26,3	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	2,99
11	110	7	15,2	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	2,96
		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	3,00
12,5	125	8	19,7	294	3,37	467	4,87	122	2,49	3,36
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	3,40
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	3,45
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	3,53
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	3,61
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	3,68
14	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	3,78
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	3,82
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	3,90
16	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	4,30
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	4,35
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	4,39
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	4,47
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	4,55
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	4,63
18	180	20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	4,70
		11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	4,85
20	200	12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	4,89
		12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	5,37
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	5,42
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	5,46
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	5,54
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5,70
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	5,89
30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	6,07		
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	5,93
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	6,02
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	6,75
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	6,83
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	6,91
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	7,00
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	7,11
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	7,23
		30	142,0	8117	7,59	12965	9,56	3389	4,89	7,31

5 КУТИКИ СТАЛЕВІ ГАРЯЧЕКАТАНІ НЕРІВНОПОЛИЧНІ (за ГОСТ 8510-86)



Позначення:

B – ширина більшої полки b – ширина меншої полки
 d – товщина полки F – площа перерізу
 I – момент інерції i – радіус інерції
 x_0, y_0 – відстані від центра ваги перерізу до зовнішніх граней полоч.
 α – кут нахилу осі u

Приклад позначення профілю:
Кутик 50x32x3 ГОСТ 8510-86

Таблиця А.5

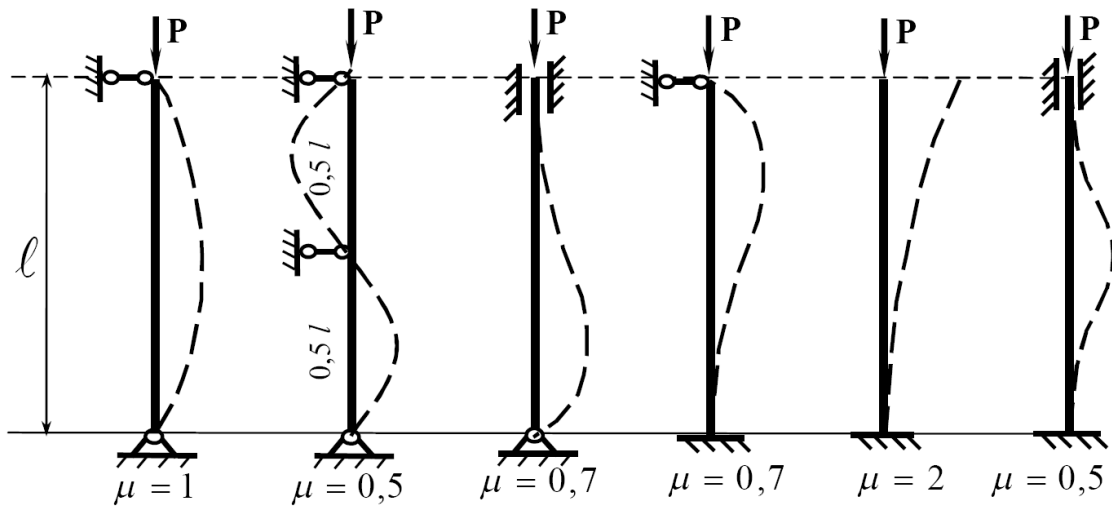
Номер кутика	Основні розміри, мм			F см ²	J_x см ⁴	J_y см ⁴	J_u min см ⁴	i_u см	x_0 см	y_0 см	tg α								
	B	b	d																
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,70	0,22	0,13	0,34	0,42	0,86	0,392								
			4																
3/2	30	20	3	1,43	1,27	0,45	0,26	0,43	0,51	1,00	0,427								
			4									1,86	1,61	0,56	0,34	0,43	0,54	1,04	0,421
3,2/2	32	20	3	1,49	1,52	0,46	0,28	0,43	0,49	1,08	0,382								
			4									1,94	1,93	0,57	0,35	0,43	0,53	1,12	0,374
4/2,5	40	25	3	1,89	3,06	0,93	0,56	0,54	0,59	1,32	0,385								
			4									2,47	3,93	1,18	0,71	0,54	0,63	1,37	0,381
			5									3,03	4,73	1,41	0,86	0,53	0,66	1,41	0,374
4/3	40	39	4	2,67	4,18	2,01	1,09	0,64	0,78	1,28	0,544								
			5									3,28	5,04	2,41	1,33	0,64	0,82	1,32	0,539
4,5/2,8	45	28	3	2,14	4,41	1,32	0,79	0,61	0,64	1,47	0,382								
			4									2,80	5,68	1,69	1,02	0,60	0,68	1,51	0,379
5/3,2	50	32	3	2,42	6,18	1,99	1,18	0,70	0,72	1,60	0,403								
			4									3,17	7,98	2,56	1,52	0,69	0,76	1,65	0,401
5,6/3,6	56	36	4	3,58	11,4	3,7	2,19	0,78	0,84	1,82	0,406								
			5									4,41	13,8	4,48	2,66	0,78	0,88	1,86	0,404
6,3/4	63	40	4	4,04	16,3	5,16	3,07	0,87	0,91	2,03	0,397								
			5									4,98	19,9	6,26	3,72	0,86	0,95	2,08	0,396
			6									5,90	23,3	7,28	4,36	0,86	0,99	2,12	0,393
			8									7,68	29,6	9,15	5,58	0,85	1,07	2,20	0,386
6,5/5	65	50	5	5,56	23,41	12,08	6,41	1,07	1,26	2,00	0,576								
			6									6,60	27,46	14,12	7,52	1,07	1,30	2,04	0,575
			7									7,62	31,32	16,05	8,60	1,06	1,34	2,08	0,571
			8									8,62	35,00	18,88	9,65	1,06	1,37	2,12	0,570
7/4,5	70	45	5	5,59	27,76	9,05	5,34	0,98	1,05	2,28	0,406								
7,5/5	75	50	5	6,11	34,81	12,47	7,24	1,09	1,17	2,39	0,436								
			6									7,25	40,92	14,60	8,48	1,08	1,21	2,44	0,435
			7									8,37	46,77	16,61	9,69	1,08	1,25	2,48	0,435
			8									9,47	52,38	18,52	10,87	1,07	1,29	2,52	0,430

Продовження таблиці А.5

Номер кутика	Основні розміри, мм			F см ²	J_X см ⁴	J_Y см ⁴	J_u min см ⁴	i_u см	x_0 см	y_0 см	tg α
	B	b	d								
8/5	80	50	5	6,36	41,64	12,68	7,57	1,09	1,13	2,60	0,387
			6	7,55	48,98	14,85	8,88	1,08	1,17	2,65	0,386
8/6	80	60	6	8,15	52,06	25,18	13,61	1,29	1,49	2,47	0,547
			7	9,42	59,61	28,74	15,58	1,29	1,53	2,52	0,546
			8	10,6	66,88	32,15	17,49	1,28	1,57	2,56	0,544
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,3	19,7	11,8	1,22	1,26	2,92	0,384
			6	8,54	70,6	21,2	12,7	1,22	1,28	2,95	0,384
			8	11,2	90,9	27,1	16,3	1,21	1,36	3,04	0,380
10/6,3	100	63	6	9,59	98,3	30,6	18,20	1,38	1,42	3,23	0,393
			7	11,1	113,0	35,0	20,83	1,37	1,46	3,28	0,392
			8	12,6	127,0	39,2	23,38	1,36	1,50	3,32	0,391
			10	15,5	154,0	47,1	28,34	1,35	1,58	3,40	0,387
10/6,5	100	65	7	11,2	114,0	38,3	22,77	1,41	1,52	3,24	0,415
			8	12,7	138,3	43,0	25,24	1,41	1,56	3,28	0,414
			10	15,7	155,5	51,7	30,60	1,40	1,64	3,37	0,410
11/7	110	70	6,5	11,4	142	45,6	26,9	1,53	1,58	3,55	0,402
			8	13,9	172	54,6	32,3	1,52	1,64	3,61	0,400
12,5/8	125	80	7	14,1	227	73,7	43,4	1,76	1,80	4,01	0,407
			8	16,0	256	83,0	48,8	1,75	1,84	4,05	0,406
			10	19,7	312	100,0	59,3	1,74	1,92	4,14	0,404
			12	23,4	365	117,0	69,5	1,72	2,00	4,22	0,400
14/9	140	90	8	18,0	364	120	70,3	1,98	2,03	4,49	0,411
			10	22,2	444	146	85,5	1,96	2,12	4,58	0,409
16/10	160	100	9	22,9	606	186	110	2,20	2,23	5,19	0,391
			10	25,3	667	204	121	2,19	2,28	5,23	0,390
			12	30,0	784	239	142	2,18	2,36	5,32	0,388
			14	34,7	897	272	162	2,16	2,43	5,40	0,385
18/11	180	110	10	28,3	952	276	165	2,42	2,44	5,88	0,375
			12	33,7	1123	324	194	2,40	2,52	5,97	0,374
20/12,5	200	125	11	34,9	1449	446	264	2,75	2,79	6,50	0,392
			12	37,9	1568	482	285	2,74	2,83	6,54	0,392
			14	43,9	1801	551	327	2,73	2,91	6,62	0,390
			16	49,8	2026	617	367	2,72	2,99	6,71	0,388
25/16	250	160	12	48,3	3147	1032	604	3,54	3,53	7,97	0,410
			16	63,6	4091	1333	781	3,50	3,69	8,14	0,408
			18	71,1	4545	1475	896	3,49	3,77	8,23	0,407
			20	78,5	4987	1613	949	3,48	3,85	8,31	0,405

Додаток Б Основні параметри стиснутих стрижнів

1 Коефіцієнти μ приведеної довжини

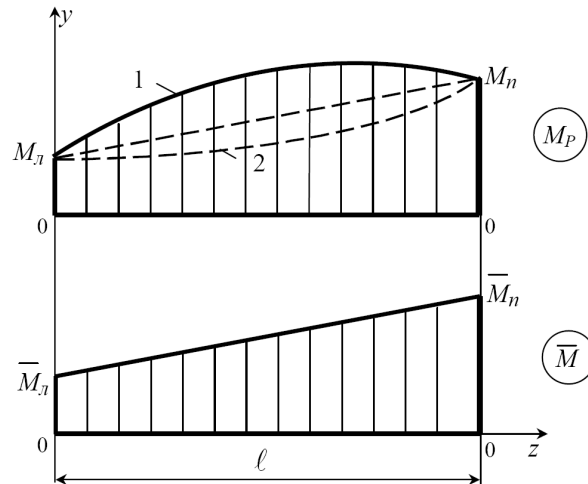


2 Коефіцієнти зменшення основного допустимого напруження ϕ

Таблиця Б.1

Гнучкість λ	сталь Ст 4, 3, 2	сталь Ст5	сталь СПК	чавун	дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	-	0,25
120	0,45	0,36	0,30	-	0,22
130	0,40	0,33	0,26	-	0,18
140	0,36	0,29	0,23	-	0,16
150	0,32	0,26	0,21	-	0,14
160	0,29	0,24	0,19	-	0,12
170	0,26	0,21	0,17	-	0,11
180	0,23	0,19	0,15	-	0,10
190	0,21	0,17	0,14	-	0,09
200	0,19	0,16	0,13	-	0,08

Додаток В. Формула крайніх ординат і особливості її застосування



$$\Delta = \bar{M}_P \times \bar{M} = \frac{\ell}{6E \cdot J_x} \cdot (2M_{Ll} \cdot \bar{M}_{Ll} + 2M_{Ll} \cdot \bar{M}_{Ll} + M_{Ll} \cdot \bar{M}_{Ll} + M_{Ln} \cdot \bar{M}_{Ln}) \pm \frac{q\ell}{24E \cdot J_x} (\bar{M}_{Ll} + \bar{M}_{Ln}).$$

Формула призначена для визначення (по Мору) переміщень в балках і рамах при плоскому згині. В ній позначено:

Δ – переміщення (лінійне – δ , кутове – θ) в заданому місці балки або рами;

M_P і \bar{M} – відповідно епюри згинальних моментів від заданого навантаження і одиничного силового фактору (сили або моменту);

ℓ – довжина ділянки балки або стрижня рами (тобто відрізка, на якому кожна з обох епюр зображується єдиною лінією);

yz – силова площина;

x і y – головні центральні осі перерізу балки або стрижня рами (вісь x на схемі не зображена);

J_x – момент інерції перерізу відносно осі x ;

E – модуль пружності першого роду для матеріалу балки або рами;

q – інтенсивність розподіленого навантаження;

M_{Ll}, M_{Ln} – крайні ординати епюри M_P ;

$\bar{M}_{Ll}, \bar{M}_{Ln}$ – крайні ординати епюри \bar{M} .

Формула застосовується для кожної ділянки балки, де обидві епюри не є нульовими, після чого знайдені для всіх ділянок величини Δ складаються з урахуванням їхніх знаків. У рамах ці величини визначаються для всіх зазначених ділянок усіх стрижнів.

Величини крайніх ординат обох епюр підставляються у формулу зі своїми знаками; на схемі вони показані як додатні.

Знак "плюс" перед поправкою на кривизну (тобто другою складовою у формулі крайніх ординат) ставиться в разі, коли епюра M є опуклою (крива 1), а мінус – коли вона вогнута (крива 2). Коли ж ця епюра прямолінійна, поправка на кривизну дорівнює нулю.